

A feladat megoldásához szükségünk van a félgömbhéj tömegközéppontjának helyére. Könnyen belátható, hogy ha egy gömbhéjat egymáshoz közeli párhuzamos síkokkal keskeny gömbövekre vágunk szét, akkor mindegyik gömböv felszíne (s ezzel arányosan a tömege) ugyanakkora lesz. Az 1. ábrán látható jelölésekkel ugyanis a vastag vonaldrabbal jelölt ív hossza $\Delta x / \sin \alpha$, a hozzá tartozó vékony gömböv sugara $R \sin \alpha$, a gömböv felszíne pedig

$$2\pi R \sin \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\sin \alpha} = 2\pi R \Delta x,$$

ami valóban független α -tól, tehát valamennyi gömbövre ugyanakkora. Innen már következik, hogy a félgömbhéj tömegközéppontja a gömb középpontjától $R/2$ távolságban van.

Tekintsük azt az egyensúlyi helyzetet, amikor a bogár éppen eléri a félgömbhéj peremét (2. ábra). A forgatónyomatékok egyensúlyából

$$\frac{R}{2} \sin \alpha \cdot Mg = R \cos \alpha \cdot mg,$$

ahonnan az ábrán látható elfordulási szögre $\operatorname{tg} \alpha = 2m/M$ adódik.

a) A bogár W munkavégzése a rendszer helyzeti energiájának megváltozásával egyezik meg:

$$W = mgR(1 - \sin \alpha) + Mg \frac{R}{2}(1 - \cos \alpha),$$

ahonnan $\operatorname{tg} \alpha$ fentebb kiszámított értékének felhasználásával algebrai átalakítások után végül

$$W = \frac{1}{2} Rg \left(2m + M - \sqrt{4m^2 + M^2} \right)$$

b) A bogár és a félgömbhéj közötti tapadási súrlódási együtthatónak legalább akkorának kell lennie, hogy a bogár még a legmeredekebb felületen, vagyis a perem közelében se csússzon meg. Ennek feltétele: $S \leq \mu N$. A 2. ábráról leolvasható, hogy $S/N = \operatorname{ctg} \alpha$, a meg nem csúszás feltétele tehát:

$$\mu \geq \frac{M}{2m}.$$

c) A vízszintes asztal és a félgömbhéj közötti súrlódásnak a vizsgált kérdések szempontjából nincs szerepe. A bogár lassan mászik, tehát minden pillanatban egyensúlyban levőnek tekinthető a rendszer. Emiatt a rá ható erők eredője nulla kell legyen, s mivel vízszintes irányú külső erő nem hat, az asztalnál sem léphet fel számottevő súrlódási erő. A félgömbhéj tehát még nagyon csúszós asztalon sem csúszik meg (ha a bogár óvatosan mászik), s emiatt súrlódási munkával sem kell számolnunk.

Enyedi Balázs (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. 11. o.t.)

