

A mesterséges hold pályája Kepler I. törvénye szerint egy olyan ellipszis, melynek egyik fókuszpontja a bolygó középpontja. Az 1. ábráról leolvasható, hogy visszaérkezéskor a sebességvektor akkor lesz párhuzamos (és ellentétes irányú) a kilövés sebességével, ha a kilövési és a visszaérkezési pontok az ellipszis kistengelyének végpontjai. Ekkor viszont az ellipszis $2a$ nagytengelye éppen a bolygó sugarának kétszerese kell legyen, tehát $a = R$.

Kepler III. törvénye értelmében a keringési idők különböző lapultságú, de azonos nagytengelyű pályákon ugyanakkorak, tehát a szóban forgó ellipszispályán is a teljes keringési idő a megadott T_0 -al lenne egyenlő. A műhold azonban csak a pálya felét teszi meg. Az ehhez szükséges idő *nem* a keringési idő fele, hanem (Kepler II. törvénye szerint) a vezérsugar által sűrolt területtel arányos. Mivel az ellipszis teljes területe

$$A_0 = ab\pi = a^2\pi \sin \frac{\alpha}{2},$$

a pálya fele alatt sűrolt terület pedig

$$A_1 = ab\pi/2 + bc = \frac{1}{2}a^2\pi \sin \frac{\alpha}{2} + a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

A kérdéses idő tehát

$$T_1 = \frac{A_1}{A_0}T_0 = T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\pi} \right).$$

A műhold a bolygó felszínétől legfeljebb

$$2a - a - (a - c) = c = R \cos \frac{\alpha}{2} \leq R$$

távolságra juthat el.

Végh A. László (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Érdekes, hogy $\alpha \rightarrow 0$ határesetben $T_1 \rightarrow T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)$, a felszíntől való legnagyobb eltávolódás pedig R -hez tart, míg $\alpha = 0$ esetén *tetszőleges* kilövési sebesség megfelelő, és a eltávolodás nagysága is akármilyen nagy vagy kicsi lehet. Ezek a mennyiségek tehát nem folytonos függvényei α -nak az $\alpha = 0$ pontban.

2. Ha a kilövési sebesség elegendően nagy, legalább az első kozmikus sebességgel egyenlő, akkor a 2. ábrán látható pálya valósul meg. A visszaérkezési sebesség most is párhuzamos a kilövési sebességgel, még az irányuk is megegyezik. A bolygótól való eltávolodás tetszőlegesen nagy lehet, a repülés ideje legalább T_0 , s mindez az $\alpha = 0$ szögtávolság speciális esetének felel meg.

Kovács István (Mezőkövesd, Szent László Gimn., 12. o.t.)

3. Figyelemre méltó, hogy a feladat elemi megoldásához egyszerűen kellett alkalmaznunk Kepler mindhárom törvényét.

