Számítsuk ki, mekkora az elektromos térerősség a töltésfelhő középétől R távolságban! Ha a $r = R$ helyről sugárirányban elmozdulunk egy nagyon kicsit, mondjuk a $r = 1{,}001R$ távolságig, akkor a potenciál (zsebszámológéppel numerikusan könnyen meghatározható) megváltozása

$$\Delta U = U(1{,}001\,R) - U(R) = 0{,}729\,006\,U_0 - 0{,}729\,329\,U_0 = -0{,}323 \cdot 10^{-3}\,U_0.$$

Ugyanez a mennyiség úgy is kiszámítható, mint a (kicsiny szakaszon állandónak tekinthető) elektromos térerősség -1-szeresének és a $\Delta r = 10^{-3}R$ elmozdulásnak a szorzata: $\Delta U = -E \cdot \Delta r$, ahonnan

$$E(R) = -\frac{\Delta U}{\Delta r} = \frac{0{,}323 \cdot 10^{-3}\,U_0}{10^{-3}R} = 0{,}323\,\frac{U_0}{R}.$$

Az $r < R$ térrészben található $Q(R)$ töltés mennyiségét a Gauss-törvény segítségével határozhatjuk meg:

$$4\pi R^2 \cdot E(R) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q(R),$$

ahonnan

$$Q(R) = \varepsilon_0\,4\pi R^2\,E(R) = 0{,}323\,4\pi\varepsilon_0\,U_0 R.$$

(Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a töltésfelhő gömbszimmetriájára hivatkozva kihasználjuk, hogy $E(R)$ éppen akkora, mint egy $Q(R)$ nagyságú ponttöltés elektromos térerőssége a töltéstől R távolságban.)

Az össztöltés nagysága a potenciálfüggvény aszimptotikus ($r \to \infty$) alakjából olvasható le. Az $U(r)$ függvény képletében a szögletes zárójelben álló második (exponenciálisan csökkenő) tag az elsőhöz képest elhanyagolhatóan kicsivé válik, ha $r \gg R$. A töltésfelhő középpontjától messze tehát a potenciál $U(r) \approx U_0 R/r$ alakú, ami a

$$Q_{\text{összes}} = 4\pi\varepsilon_0\,U_0 R$$

össztöltésnek megfelelő potenciálfüggvény. (Nagy távolságból nézve tetszőleges töltésfelhő pontszerűnek tekinthető, az elektromos potenciálja tehát a Coulomb-potenciállal helyettesíthető.)

A fenti két töltést összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a kérdéses töltésfelhő össztöltésének 32,3 százaléka található az $r < R$ térrészben.

Több megoldás alapján

Megjegyzések: 1. Differenciálszámítás segítségével zárt alakban is meghatározható a töltéseloszlás. Az elektromos térerősség a potenciálfüggvény negatív deriváltja:

$$E(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = \frac{U_0}{R}\left[\frac{R^2}{r^2} - e^{-2r/R}\left(2 + 2\frac{R}{r} + \frac{R^2}{r^2}\right)\right].$$

Az r sugarú gömbben található töltés mennyisége Gauss törvénye alapján:

$$Q(r) = 4\pi\varepsilon_0\,r^2 E(r) = 4\pi\varepsilon_0 U_0 R\left[1 - e^{-2r/R}\left(1 + 2\frac{r}{R} + 2\frac{r^2}{R^2}\right)\right] =$$
$$= Q_{\text{összes}}\left[1 - e^{-2r/R}\left(1 + 2\frac{r}{R} + 2\frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$

Behelyettesítve $r = R$ értékét megkapjuk a keresett töltésarányt:

$$\frac{Q(R)}{Q_{\text{összes}}} = 1 - \frac{5}{e^2} \approx 0{,}323.$$

2. A $Q(r)$ függvény deriváltjából kiszámíthatjuk az egységnyi térfogatra jutó töltés mennyiségét, vagyis a $\varrho(r)$ töltéssűrűséget is. Egy nagyon vékony, Δr vastagságú gömbhéjban található ΔQ töltés egyrészt $\Delta Q = \dfrac{dQ(r)}{dr}\Delta r$, másrészt $\Delta Q = 4\pi r^2 \Delta r \cdot \varrho(r)$ módon is kiszámítható. A két alakot összehasonlítva a töltéssűrűségre a

$$\varrho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(r)}{dr} = -\frac{4U_0\varepsilon_0}{R^2}e^{-2r/R} = \varrho_0 e^{-2r/R}$$

kifejezés adódik. Ilyen (exponenciálisan csökkenő) sűrűségű töltéseloszlás a Természetben ténylegesen előfordul: a hidrogénatom alapállapotában az elektron (átlagos) töltéseloszlása a kvantumelmélet törvényei szerint éppen ilyen függvénnyel írható le.