Ismert, hogy egy homogén tömegeloszlású gömbhéj belsejében nulla a gravitációs mező, kívül pedig olyan, mintha a gömbhéj teljes tömege a középpontjában helyezkedne el. Ebből következik, hogy egy állandó ϱ sűrűségű gömb belsejében a középponttól r távolságban a gravitációs gyorsulás az r sugarú gömb belsejében található $m(r)$ tömeg hatásából számítható:

$$g(r) = f\frac{m(r)}{r^2} = f\frac{(4\pi\varrho/3)r^3}{r^2} = f\frac{4\pi\varrho}{3}r = k\cdot r. \tag{1}$$

Ugyanezt az összefüggést vektor alakban is megfogalmazhatjuk:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -k\cdot\mathbf{r}, \tag{2}$$

ahol $\mathbf{r}$ a gömb középpontjából a kérdéses (belső) pontba mutató vektor.

Amikor az űrhajósok megérkeznek a kisbolygóra, a nehézségi gyorsulás $g_0 = kR$, az inga lengésideje tehát

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}} = 1\ \mathrm{s}. \tag{3}$$

Az $R/2$ sugarú gömb kibányászása és elszállítása után a kisbolygó tömege az eredetinek $\frac{7}{8}$-a lesz csupán, de mivel az alakja nem gömb, a gravitációs tere *nem* számítható úgy, mintha a teljes tömege az eredeti gömb középpontjában lenne. (Az is hibás eredményre vezet, ha a tömegközéppontba képzeljük a teljes tömeget!)

A lyukas kisbolygó keresett $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ gravitációs teréről azt tudjuk, hogy ha hozzáadjuk a kibányászott üreg helyén eredetileg ott találgató anyaga (vagyis egy $R/2$ sugarú homogén gömb) $\mathbf{g}_{R/2}(\mathbf{r})$ ismert gravitációs terét, akkor az R sugarú homogén gömb ugyancsak ismert $\mathbf{g}_R(\mathbf{r})$ kifejezését kell visszakapjuk:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{g}_{R/2}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_R(\mathbf{r}), \tag{4}$$

azaz

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_R(\mathbf{r}) - \mathbf{g}_{R/2}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

(Ez az összefüggés azt mutatja, hogy az üreg akár egy „negatív tömegű” gömbként is felfogható, melynek gravitációs mezője az eredeti gömb mezőjére szuperponálódik.)

A C pontban az üreg gravitációs tere nyilván nulla, tehát az eredő nehézségi gyorsulás nagysága

$$g(C) = g_R(C) = k\cdot\frac{R}{2} = \frac{g_0}{2}.$$

Az l hosszúságú inga lengésifeje itt (3) felhasználásával

$$T_C = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(C)}} = \sqrt{2}\cdot T_0 = 1{,}41\ \mathrm{s}.$$

Az A pontban a nehézségi gyorsulás

$$g(A) = k\cdot R - k\cdot\frac{R}{2} = k\cdot\frac{R}{2} = \frac{g_0}{2},$$

tehát itt is ugyanakkora az inga lengésideje, mint az üreg középpontjában. (Kihasználtuk, hogy k csak a ϱ sűrűségtől függ, tehát az üregre ugyanakkora, mint az eredeti kisbolygóra.)

Belátjuk, hogy az üreg belsejének *tetszőleges* belső pontjában, így a D pontban is igaz ugyanez, mert az üreg belsejében a gravitációs mező *homogén.* O-val jelölve a kisbolygó középpontját, valamint (2) és (5) felhasználásával

$$\mathbf{g}(D) = -k\cdot\overrightarrow{OD} - (-k\cdot\overrightarrow{CD}) = k\cdot\overrightarrow{CO}.$$

Ez a vektor valóban független a D pont helyétől, nagysága pedig

$$g(D) = k|\overrightarrow{CO}| = k\cdot\frac{R}{2} = \frac{1}{2}g_0,$$

így tehát $T_D = 1{,}41$ s.

Az eddigi megfontolások csak az üreg belsejére érvényesek, a B pontra nem. Itt azonban a nehézségi gyorsulás számításánál az eredetileg M tömegű kisbolygó is és az üreg helyén található $M/8$ tömegű anyag is helyettesíthető egy-egy tömegponttal, tehát

$$g(B) = f\frac{M}{R^2} - f\frac{M/8}{(3R/2)^2} = f\frac{M}{R^2}\left(1-\frac{1}{18}\right) = \frac{17}{18}g_0.$$

Innen már könnyen adódik, hogy

$$T_B = \sqrt{\frac{18}{17}}T_0 = 1{,}029\ \mathrm{s}.$$

Németh Péter (Jászapáti, Mészáros L. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján