P. 158. *Írjuk egy (elég hosszú) papírcsikra az első n természetes szám tízes számrendszerbeli alakját, majd vágjuk szét a papírcsíkot úgy, hogy mindegyik darabján csak egy számjegy legyen. Tegyük e darabokat egy dobozba, keverjük össze őket és húzzunk ki egyet találomra közülük. Jelöljük p_n-nel annak a valószínűségét, hogy a kihúzott papírdarabon a 0 számjegy van rajta. Határozzuk meg a p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat határértékét.*

Erre a problémára az érkezett dolgozatok egyike sem megoldás. Emiatt a szerkesztőbizottság úgy határozott, hogy a probléma tartalmát más fogalmazásban újra kitűzi. Ez lett az F. 1883. feladat. Megoldása ezen szám 61. oldalán olvasható.

Megoldás. Jelöljük n tizes számrendszerbeli alakjában a jegyek számát k-val. Egészítsük ki képzeletben az n-nél kisebb számok tizes számrendszerbeli alakját k-jegyűvé úgy, hogy a hiányzó jegyek helyére 0-t írunk, és írjuk a sorozat elé a k db 0-val felírt 0-t. Jelöljük a közben leírt 0-k számát R_k-val. A kiegészítés után minden leírt számban k jegy van, tehát $(n+1)$ számban $(n+1)k$ a jegyek száma, és erre

$$Q_n + R_k = (n+1)k < n(k+1), \tag{2}$$

hiszen $k < n$, mihelyt $n > 1$.

A kiegészítés során az egyesek helyére egyetlen 0 jegyet írtunk, a tízesek helyére tíz 0-t írtunk, és így tovább, végül az első oszlopba, a 10^{k-1} értékű helyre 10^{k-1}-ig kellett 0-kat írni. Eszerint

$$R_k = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9},$$

tehát

$$0 < R_k < \frac{10}{9} \cdot 10^{k-1} < 2n, \tag{3}$$

hiszen $n \geqq 10^{k-1}$.

Jelöljük a kiegészítés után az összes 0 jegyek számát S_n-nel, a 10^{j-1} helyi értékű pozícióban levő 0-k számát $S_n(j)$-vel. E jelölések definíciója szerint

$$P_n + R_k = S_n, \tag{4}$$
$$S_n = S_n(1) + S_n(2) + \ldots + S_n(k).$$

Az egyesek oszlopában egy 0 után kilenc 0-tól különböző jegy áll, és ez ciklikusan ismétlődik. Emiatt

$$n + 1 \leqq 10S_n(1) < n + 10.$$

A tízesek oszlopában tíz db 0 után kilencven db 0-tól különböző jegy következik, és ez ciklikusan ismétlődik, tehát

$$n + 1 \leqq 10S_n(2) < n + 100.$$

Általában a 10^{j-1} helyi értékű számjegyek sorozata 10^{j-1} db 0-val kezdődik; utánuk $9 \cdot 10^{j-1}$ db 0-tól különböző jegy következik, és ez ciklikusan ismétlődik, tehát

$$n + 1 \leqq 10S_n(j) < n + 10^j.$$

Összegezve ezeket az egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$kn < k(n+1) \leqq 10S_n < kn + 10\frac{10^k - 1}{9} < kn + \frac{10^2}{9} \cdot 10^{k-1} < (k+12)n.$$

Felhasználva a (3) és (4) összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$P_n = S_n - R_k < \frac{k+12}{10} \cdot n,$$
$$P_n = S_n - R_k > \frac{k}{10}n - 2n = \frac{k-20}{10} \cdot n.$$

A (2) és (3) összefüggések szerint hasonlóan egyrészt

$$Q_n = (n+1)k - R_k > nk - 2n = (k-2)n,$$

másrészt

$$Q_n < (k+1)n.$$

Ezek alapján a P_n/Q_n hányadosra írhatunk fel korlátokat:

$$\frac{k-20}{k+1} \cdot \frac{1}{10} < \frac{P_n}{Q_n} < \frac{k+12}{k-2} \cdot \frac{1}{10}.$$

Itt mindkét oldal határértéke $1/10$, hiszen n-nel együtt k is tart a végtelenbe. Ez valóban így van, hiszen tetszőlegesen nagy A számhoz van olyan N, hogy $k \geqq A$, minden N-nél nagyobb n természetes számra – N szerepére ugyanis választhatjuk akármelyik $[A]$-jegyű számot. – A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.