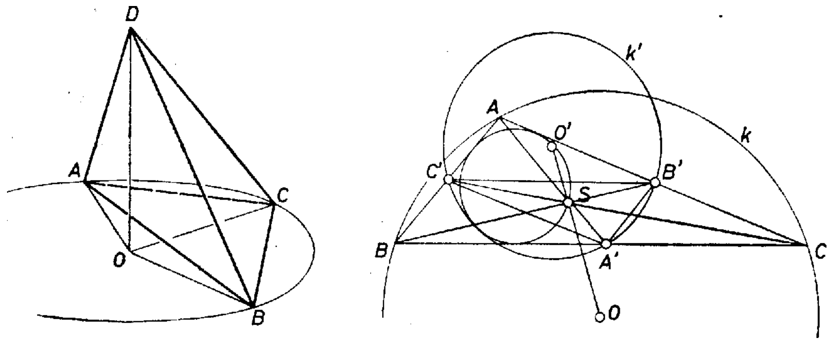
A tetraéder D csúcsa mind a feltevésben, mind az állításban megkülönböztetett szerepet játszik az egyenrangú A, B, C csúcsokkal szemben. Tekintsük ezért az ABC lapot alapnak és jelöljük D-nek az alaplapon levő vetületét O-val.



Ekkor az ODA, ODB, ODC derékszögű háromszögek a feltevés szerint egybevágók, ezért $AO = BO = CO$, tehát O az alapháromszög köré írt kör középpontja, továbbá $AO < AD$. Mivel adott ABC alapháromszög mellett D tetszőlegesen közel vihető a síkhoz, vagyis az $AD - AO$ pozitív különbség tetszőleges kicsivé tehető, azért (1) akkor és csakis akkor igaz, ha – az egyszerűbb $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AO = r$, $AD = d$ jelölésekkel – teljesül a következő:

$$\frac{1}{cb} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ba} \geq \frac{1}{r^2} \left(> \frac{1}{d^2} \right) \tag{2}$$

Tovább csak ezzel a síkmértani állítással foglalkozunk, (2)-t az ismert $2t = abc/2r = \varrho(a + b + c)$ azonosságok [1] alapján – ahol t a háromszög területe és ϱ a beírt kör sugara – ekvivalens átalakításokkal a

$$\frac{2t}{\varrho} = a + b + c \geq \frac{abc}{r^2} = \frac{4t}{r},$$

$$\frac{r}{2} \geq \varrho \tag{3}$$

alakra hozva. Kicsinyítsük a háromszög köré írt kört az S súlypontból mint centrumból $1 : 2$ arányban és a képet tükrözzük is S-re (vagyis tulajdonképpen $(-1/2)$ arányú hasonlósági transzformációt végzünk). Mivel S harmadolja a súlyvonalakat, a háromszög mindegyik csúcsának képe a szemben fekvő oldal felezőpontjában keletkezik, a háromszög képe az ún. középháromszög, és az e köré írt kör sugara $r/2$ (a háromszög ún. Feuerbach-féle köre). Ez a kör átmetszi a háromszögnek legalább egy oldalát – hacsak az oldalak közt van legalább két különböző hosszúságú, a beírt kör viszont a legnagyobb olyan kör, amelynek nincs pontja a háromszögön kívül, ebből (3) helyessége nyilvánvaló. Egyenlőség csak egyenlő oldalú háromszög esetében áll fenn. Ezzel (2)-t és az előrebocsátottak szerint a feladat állítását is bebizonyítottuk.

Bezdek András (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat kitűzését javasló tanuló a maga megoldásához az F. 1856. feladat megoldásából[2] jutott el az α, β, γ súlyok alkalmas megválasztásával.

[1] Az iskolai függvénytáblázat 331.21. összefüggései

[2] K. M. L. 47 (1973) 121-123. oldal.