Ez a példa a **Gy. 2952.** ikerfeladata, amelynek megoldása az 1995/6. (szeptemberi) szám 346–347. oldalán található meg.

Először bebizonyítjuk, hogy $k \geq 1$ esetén 5^k pontosan egyféleképpen írható fel két, 5-tel nem osztható négyzetszám összegeként. Ehhez a következő két segédtételere lesz szükségünk.

1. segédtétel. Legyen $m \geq 1$, x és y 5-tel nem osztható egész számok, és $5^m = x^2 + y^2$. Ekkor az

$$(x+2y)^2 + (2x-y)^2 = 5\left(x^2+y^2\right) = 5^{m+1}, (1a)(x-2y)^2 + (2x+y)^2 = 5\left(x^2+y^2\right) = 5^{m+1}(1b)$$

azonosságok közül az egyikben mindkét négyzetszám osztható 5-tel, a másikban egyik sem osztható 5-tel.

Az, hogy azonosságokról van szó, a négyzetreemelések elvégzésével ellenőrizhető. Elég tehát az 5-tel való oszthatóságot vizsgálni. Ehhez megjegyezzük, hogy mindkét azonosságban a jobb oldalon 5-tel osztható szám áll, tehát ha a bal oldal valamelyik tagja osztható 5-tel, akkor a másik is.

Mivel

$$0 \equiv 5^m = x^2 + y^2 \equiv x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y) \pmod 5,$$

az $x+2y$ és $x-2y$ számok közül legalább az egyik osztható 5-tel. Ebből pedig következik, hogy (1a) vagy (1b) bal oldalán 5-tel osztható számok állnak. Másrészt nem állhat mindkét egyenlet bal oldalán csupa 5-tel osztható szám, mert $2(x+2y)-(2x+y) = 3y$ nem osztható 5-tel.

2. segédtétel. Legyen $m \geq 1$, a és b 5-tel nem osztható számok, és $a^2 + b^2 = 5^{m+1}$. Ekkor az

$$x+2y = a; \qquad 2x-y = b(2a)sazx-2y = b; \qquad 2x+y = a(2b)$$

egyenletrendszerek egyértelműen megoldhatók, az egyik egyenletrendszer megoldásai egész számok, a másik megoldásai nem egészek.

Könnyű ellenőrizni, hogy a megoldások

$$x = \frac{a+2b}{5}, \qquad y = \frac{2a-b}{5}, illetvex = \frac{2a+b}{5}, \qquad y = \frac{a-2b}{5}.$$

Az 1. segédtételhez hasonlóan igazolható, hogy vagy (2a) megoldásai egészek, vagy (2b) megoldásai.

Az (1a) és (1b) azonosságok és az 1. segédtétel alapján minden olyan egész $(x;y)$ számpárhoz, amelyben sem x, sem y nem osztható 5-tel, és $x^2+y^2=5^m$, hozzárendelhetünk egy olyan $(a;b)$ számpárt, amelynek tagjai szintén nem oszthatók 5-tel, és $a^2+b^2=5^{m+1}$. A 2. segédtétel pedig biztosítja, hogy a hozzárendelés megfordítható; minden megfelelő $(a;b)$ párt pontosan egy $(x;y)$ számpárhoz rendeltünk hozzá. Következésképpen 5^{m+1} és 5^m ugyanannyiféleképpen írható fel két 5-tel nem osztható négyzetszám összegeként.

Mivel $5^1 = 5$ egyféleképpen (2^2+1^2) írható fel, azért minden m pozitív egészre 5^m pontosan egyféleképpen áll elő két, 5-tel nem osztható négyzetszám összegeként.

Ha $m \geq 0$ egész, akkor 5^{m+2} pontosan annyiféleképpen írható fel két 5-tel osztható négyzetszám összegeként, mint ahányféleképpen 5^m felírható két (5-tel nem feltételnül osztható) négyzetszám összegeként. Ez egyszerűen a négyzetszámok 25-tel való megszorzásával adódik, Ehhez jön hozzá az a felbontás, amelyben a két négyzetszám nem osztható 5-tel. Az 5^{m+2} tehát 1-gyel többféle módon áll elő két négyzetszám összegeként, mint az 5^m. Ebből pedig, mivel $m=0$-ra és $m=1$-re igaz, teljes indukcióval azonnal következik a feladat állítása.

Megjegyzés. A feladat valójában az egész számok egy kiterjesztésével, az úgynevezett *Gauss-egészek* halmazával kapcsolatos. Gauss-egészeknek az $a+bi$ alakú számokat nevezik, ahol a és b egészek, i a komplex egység. Ezeken a számokon a komplex műveleti szabályoknak megfelelően definiálható az abszolút érték, az összeadás, a kivonás, a szorzás, az oszthatóság, sőt még a maradékos osztás is. Négy olyan Gauss-egész van, amely minden Gauss-egésznek osztója: az 1, a -1, az i és a $-i$. Ezeket nevezik *egységeknek*. Két Gauss-egészt *asszociáltnak* nevezünk, ha valamelyik a másiknak egységszerese. Ha egy egységtől különböző Gauss-egésznek az egységeken kívül csak önmagával asszociált osztója van, akkor *felbonthatatlannak* (*irreducibilisnek*) nevezzük. A Gauss-egészek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy érvényes rájuk a számelmélet alaptétele: minden egységtől és 0-tól különböző Gauss-egész felírható felbonthatatlan számok szorzataként, és a felbontásban szereplő tényezők a sorrendtől és asszociáltságtól eltekintve egyértelműek. Az alaptétel következménye, hogy minden felbonthatatlan szám *prím*, azaz ha osztója egy szorzatnak, akkor valamelyik tényezőnek is osztója.

A feladat lényegében annak meghatározása, hogy hány olyan $a+bi$ alakú Gauss-egész van, amelyre $a^2+b^2=5^k$. Mivel $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ és $5^k = ((2+i)(2-i))^k = (2+i)^k(2-i)^k$, a számelmélet alaptétele miatt $a+bi = \varepsilon(2+i)^l(2-i)^{k-l}$ alakú, ahol ε egység és $0 \leq l < k$. Az ilyen számok száma $4(k+1)$. Az 5^k két négyzetszámként való felírásait többnyire nyolcszor kapjuk meg, kivéve azokat, amelyekben valamelyik négyzetszám 0. (Ez csak páros esetben fordul elő.) Az 5^k két négyzetszám összegeként történő felírásainak száma tehát páratlan k esetén $\dfrac{4(k+1)}{8} = \dfrac{k+1}{2}$, páros k esetén $\dfrac{4(k+1)-4}{8}+1 = \dfrac{k}{2}+1$.

Be lehet bizonyítani, hogy a $4k+3$ alakú prímszámok a Gauss-egészek körében is felbonthatatlanok, következésképpen prímek, a többi prímszám felbontható két Gauss-egész szorzatára (pl. $29 = (5+2i)(5-2i)$). Ennek felhasználásával be lehet bizonyítani, hogy egy pozitív egész pontosan annyiféleképpen írható fel két négyzetszám összegeként, mint amennyi a $4k+1$ és $4k+3$ alakú osztói számának különbsége. Különbözőnek tekintjük az a^2+b^2 és a b^2+a^2 felírást, ha $a \neq b$, de kikötjük, hogy $b \neq 0$. Ennek a tételnek a felhasználásával a megoldás egyszerűbb az előzőnél, bár attól nem lényegesen különböző.

K. G.