

Először megmutatjuk, hogy öt egyenes pontosan akkor osztja 16 részre a síkot, ha közülük semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton (a továbbiakban az ilyen egyeneseket *általános helyzetűeknek* nevezzük.)

Jelöljük s_n -nel azoknak a részeknek a számát, amelyekre n általános helyzetű egyenes felosztja a síkot. Nyilvánvaló, hogy $s_1 = 2$ és $s_2 = 4$. Megmutatjuk, hogy $s_n = s_{n-1} + n$. Mivel az egyenesek általános helyzetűek, azért egy rögzített egyenest a többi $n - 1$ éppen n részre oszt (1. ábra). Ezen n rész mindegyike kettévág egy olyan síkrészt, amelyet a többi $n - 1$ egyenes határozott meg. Ezért a síkrészek száma n -nel nő.

Gondolatmenetünkben az is következik, hogy s_n független az egyenesek elhelyezkedésétől, n darab általános helyzetű egyenes a síkot mindig ugyanannyi részre osztja.

Képletünket alkalmazva kapjuk, hogy $s_5 = s_4 + 5 = s_3 + 4 + 5 = s_2 + 3 + 4 + 5 = 16$. Ha az egyenesek nem általános helyzetűek, akkor a síkrészek száma 16-nál kevesebb (mert van olyan egyenes, amit a többi négy nem öt részre, hanem annál kevesebbre oszt).

Azt kell tehát meghatároznunk, hogy öt általános helyzetű egyenes által alkotott részek között hány háromszög lehet. Négy általános helyzetű egyenes mindig egy négyszöget, ahhoz egy-egy oldallal illeszkedő két háromszöget és 8 végtelenbe nyúló részt alkot (2. ábra). Egy ötödik egyenes a 3. ábrán látható lényegében különböző helyzeteket felvéve 3, 4 vagy 5 háromszöget hozhat létre. (A részletek átgondolását az olvasóra bizzuk.) Tehát a háromszögek száma legalább 3.

Belátjuk, hogy a háromszögek maximális száma 5. Ha legalább 6 háromszög lenne, akkor azoknak együttesen legalább 18 oldaluk volna. Mivel semelyik három egyenes nem megy át egy ponton, azért két háromszögnek nem lehet közös oldala, vagyis a 6 háromszöghöz legalább 18 véges szakasz tartozna. Egy egyenesből a másik négy (mint azt az 1. ábrán láttuk) három véges szakaszt – és két félegyenest – metsz ki, tehát a véges szakaszok száma $5 \cdot 3 = 15$. Ezért nem lehet a részek közt 6 (vagy annál több) háromszög.

Tehát a feladat kérdésére a válasz: a síkrészek közt legalább három és legfeljebb öt háromszög van.





