Tekintsük a feladatot megoldottnak. A P-n átmenő és egymással α szöget bezáró e és f egyenesek az adott k_1 és k_2 körökből az egyenlő hosszúságú A_1B_1 és A_2B_2 húrokat metszik ki (*1. ábra*). Forgassuk el k_2-t és f-et P körül α szöggel úgy, hogy f képe e legyen. A k_2 képe legyen k_2', A_2 és B_2 képe pedig A_2', illetve B_2'. Ezzel problémánkat visszavezettük a következő, egyszerűbb feladatra: Adott két kör és egy pont. Szerkesszünk a ponton át olyan egyenest, amelyik a körökből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki. Eredeti feladatunk megoldásainak száma a módosított feladat megoldásszámától függ. Terjedelmi okokból a szokásos diszkussziótól el kell tekintenünk, ugyanis többféle bonyodalom adódhat.

Az *1. ábrán* felvett helyzetben azért lesz megoldás, mert a k_1 és k_2' körök P-ből vett látószögtartományainak *van közös része*, de egyik sem esik bele teljesen a másikba; P körül forgatva a szelőt, az egyikből kimetszett húr hosszabbodik, a másik rövidül. Ismétlődne ez, ha P e két kör „között” lenne és emiatt egyik szögtartomány helyett csúcsszögtartományát néznénk. Valamivel nagyobb α esetén már nem lenne közös rész.

Más is okozhat gondot, pl. ha k_2' metszené k_1-et, így csak akkor lehetne megoldás, ha közös húregyenesük éppen átmenne P-n. Előfordulhatna $r_1 = r_2$ esetén, hogy a két kör azonos. Bele is eshetne k_2' a k_1-be, ha $r_2 < r_1$, másrészt esetleg „elnyelné” azt, ha $r_2 > r_1$.

Az $r_1 = r_2$ esetben, ha k_2' a k_1-en kívül esne, és P „köztük” volna„ gondolnunk kellene az O_1O_2' egyenessel párhuzamos közös szelőre, és olyanra is, amely szétválasztja a két középpontot.

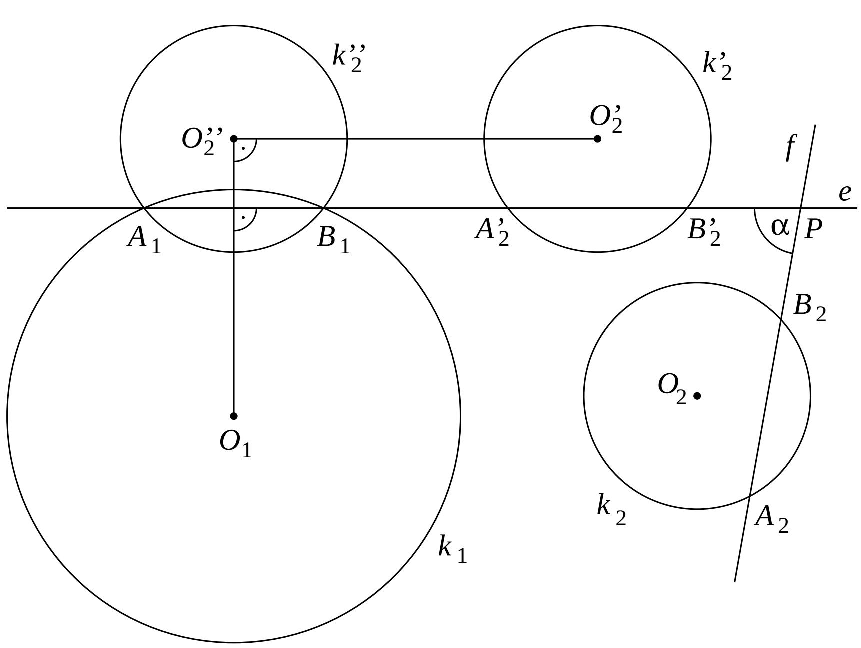
Visszatérve a feladat megoldására, toljuk el k_2'-t az $\overrightarrow{A_2'A_1}$ vektorral, a képét jelöljük k_2''-vel. Mivel $A_1B_1 = A_2B_2 = A_2'B_2'$, ezért az eltolásnál B_2' képe B_1 lesz. Jelöljük O_1, O_2, O_2', O_2''-vel a k_1, k_2, k_2' és k_2'' körök középpontját.

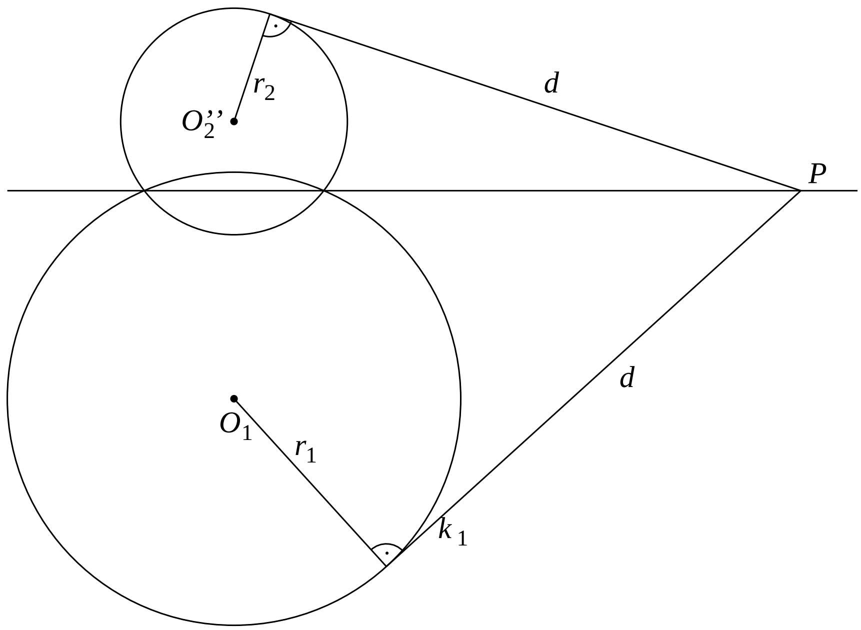
Az e egyenes a k_1 és k_2'' körök közös húrja, ezért O_1O_2'' merőleges e-re. Viszont az eltolás miatt $O_2'O_2'' \parallel e$, tehát $O_2'O_2''O_1\sphericalangle = 90^\circ$, azaz O_2'' rajta van az O_1O_2' szakasz Thalész-körén. P-ből – sőt az e egyenes minden pontjából – a k_1 és k_2'' körökhöz egyenlő hosszúságú érintők húzhatók (ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötetének 1323. feladatában). Jelöljük ennek az érintőnek a hosszát d-vel, k_i sugarát pedig r_i-vel. Tudjuk, hogy az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra, ezért Pitagorasz tétele szerint ${PO_2''}^2 = d^2 + r_2^2$ és $PO_1^2 = d^2 + r_1^2$ (*2. ábra*). Vagyis $PO_2'' = PO_1^2 - r_1^2 + r_2^2$. Tehát O_2'' rajta van a P középpontú, $\sqrt{PO_1^2 - r_1^2 + r_2^2}$ sugarú körön.

Ezek alapján a szerkesztést az alábbi módon végezhetjük: PO_1, r_1 és r_2 ismeretében megszerkesztjük a $\sqrt{PO_1^2 - r_1^2 + r_2^2}$ távolságot (*3. ábra*), majd ezzel a távolsággal mint sugárral P körül kört rajzolunk. Jelöljük ezt a kört l-lel. O_2, P és α segítségével megszerkesztjük O_2'-t. O_1O_2' Thalész-körének és l-nek a metszéspontja adja O_2''-t. Az O_2'' körüli r_2 sugarú kör és k_1 metszéspontjai megadják a P-n átmenő $A_1B_1 = e$ egyenest. Végül e-t P körül α szöggel visszaforgatva (azaz az $O_2PO_2'\sphericalangle$ irányított szöggel ellentétes irányban forgatva – *4. ábra*) megkapjuk az f egyenest. A szerkesztésből következik, hogy e és f a feladat feltételeinek megfelelő szelők.

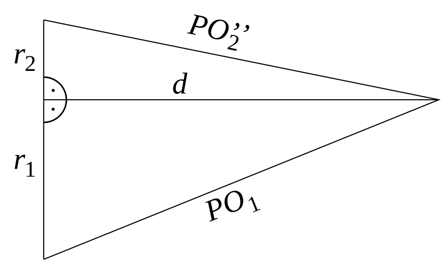
A megoldások száma O_2''-re 2, 1 vagy 0, attól függően, hogy O_1O_2' Thalész-körének és l-nek hány közös pontja van. De az is kérdés, hogy a második az O_2'' körüli r_2 sugarú kör metszi-e a k_1-et.

Szabados Péter (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

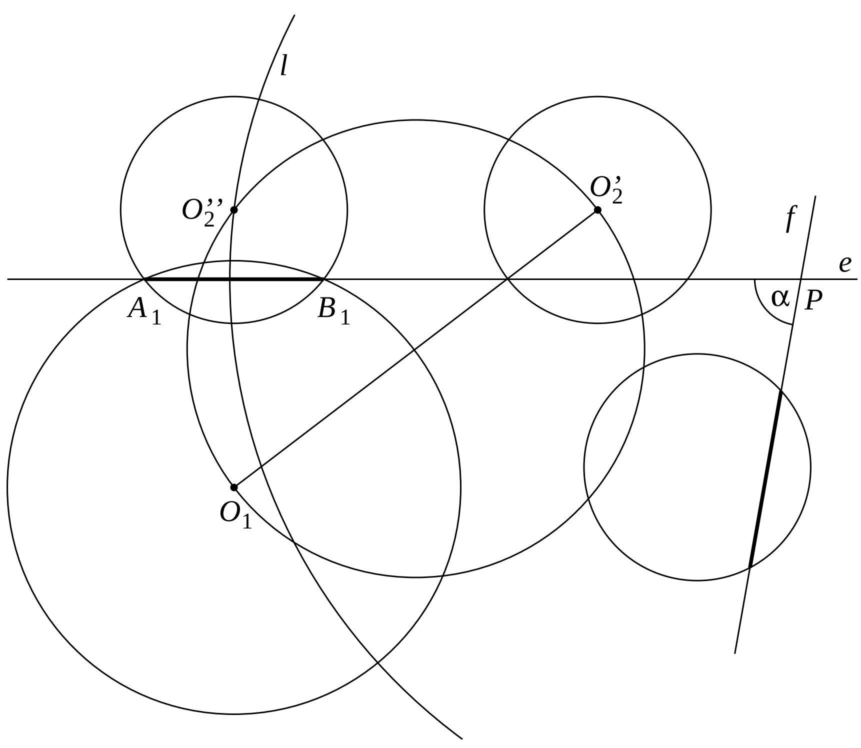




d
O_2''
r_2
P
d
O_1
r_1
k_1



PO_2''
r_2
d
r_1
PO_1



l
O_2''
O_2'
f
e
α
P
A_1
B_1
O_1