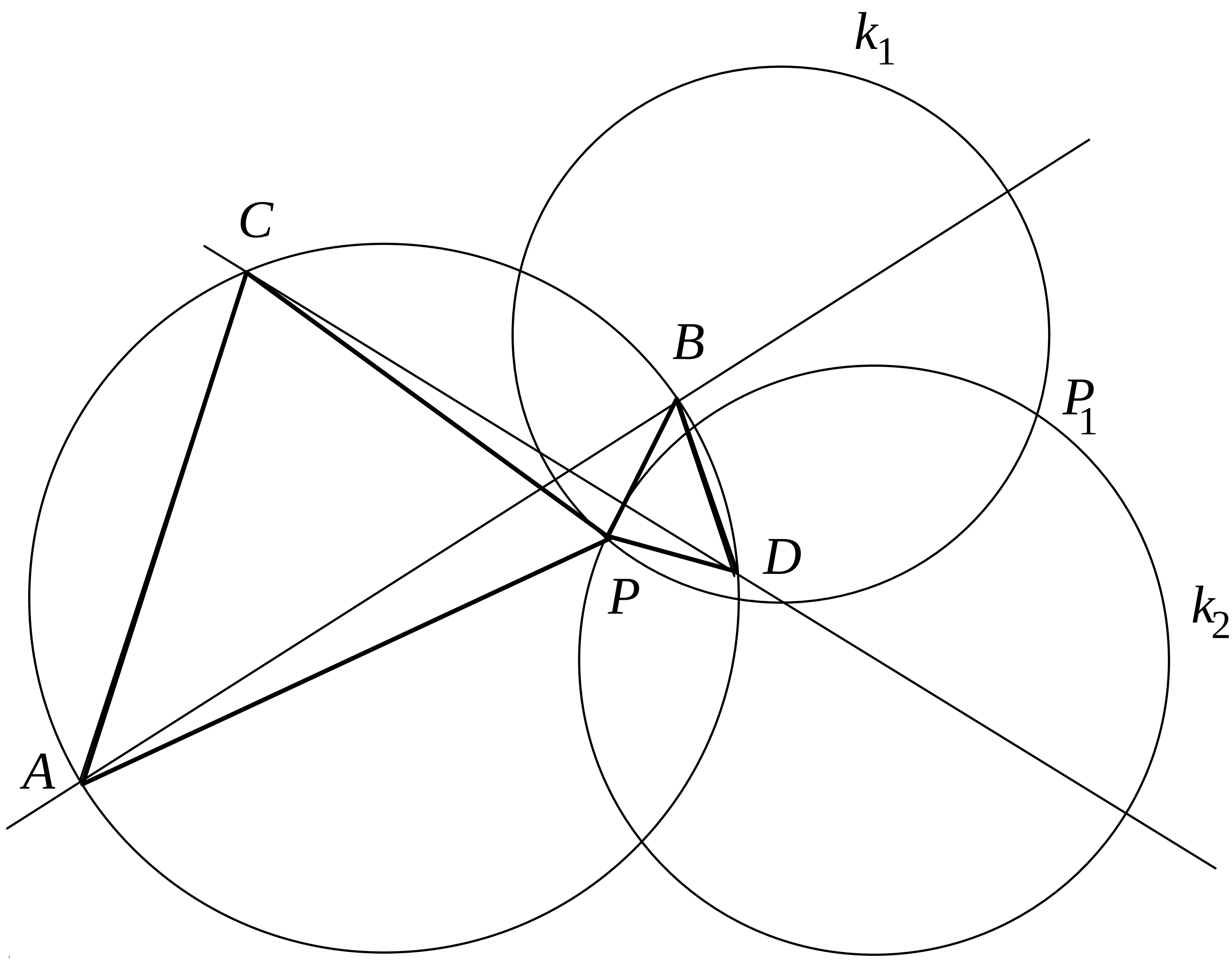
Tegyük fel, hogy megtaláltuk a forgatva nyújtás P középpontját (*1. ábra*). Az APC és BPD háromszögek hasonlóságából következik, hogy $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{CP}{DP}=\dfrac{AC}{BD}$. Ha $AC\neq BD$, akkor $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{AC}{BD}$ azt jelenti, hogy P rajta van az A, B alappontokhoz tartozó $\dfrac{AC}{BD}$ arányú Apollóniosz-körön, ábránkon ez a k_1 kör. Hasonlóan megállapíthatjuk, hogy P illeszkedik a C, D alappontokhoz tartozó ugyanilyen arányú Apollóniosz-körre is. Ezért P a két kör közös pontja, a körök ismert módon szerkeszthetők. (Lásd pl. H. S. N. Coxeter: A geometriák alapjai, 100. old.)

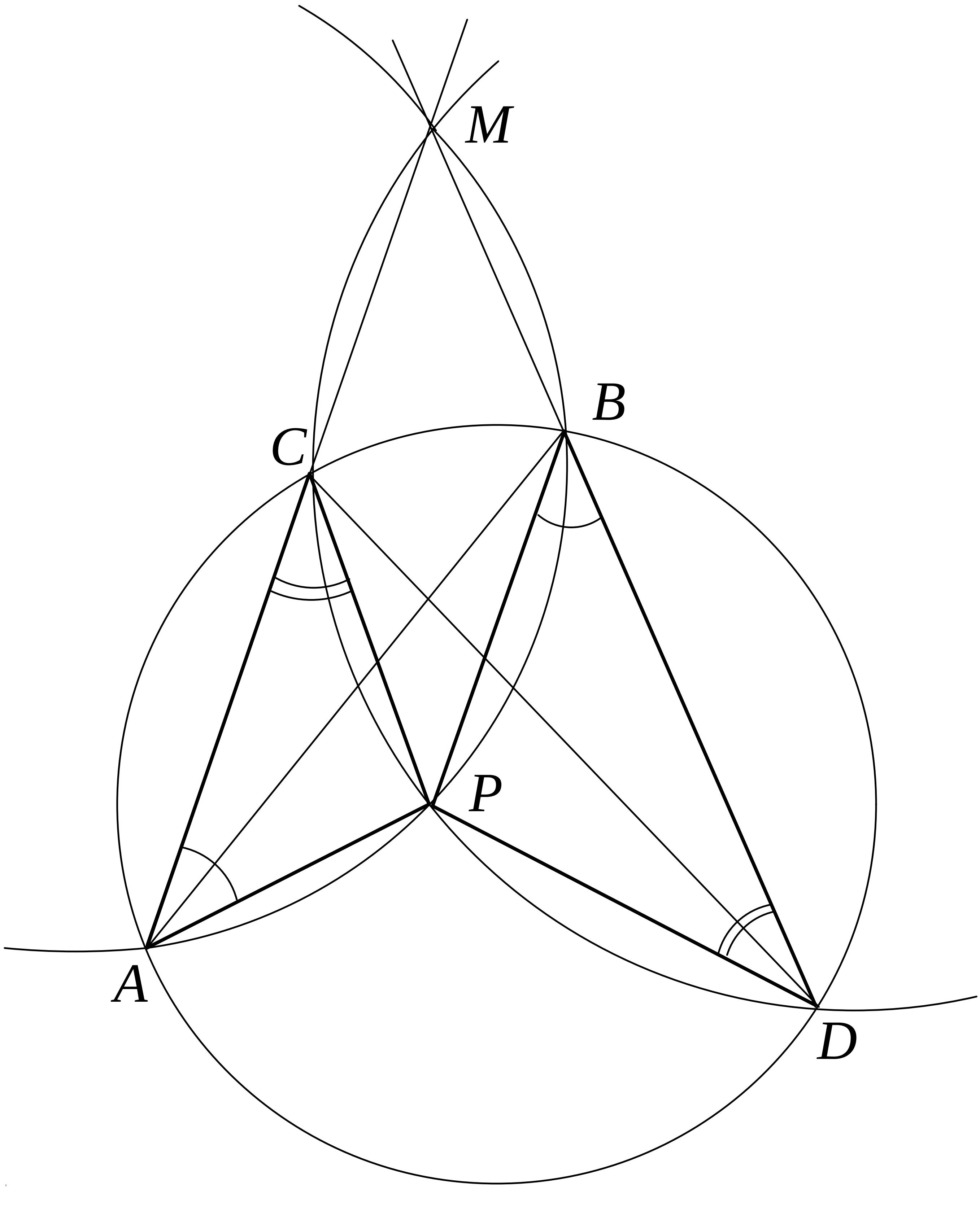
A szerkesztésből következik, hogy a feladatnak legfeljebb két megoldása lehet. Az *1. ábrán* P megoldás, de k_1 és k_2 másik metszéspontja, P_1 nem az. Ennek az az oka, hogy az AP_1C és BP_1D háromszögek körüljárási iránya eltérő, és így forgatva nyújtással nem vihetők egymásba. Ugyanez a helyzet, ha az AB és CD húroknak nincs közös pontja. Ha k_1 és k_2 érinti egymást egy P pontban, P csak akkor megoldás, ha az APC és a BPD háromszögek körüljárási iránya megegyezik.

Hátravan még az $AC=BD$ eset. Ekkor P az A, B, C, D pontok körülírt körének a középpontja lesz, de most is csak akkor van megoldás, ha APC és BPD körüljárási iránya azonos.

Megjegyzés. Egy másik megoldást kapunk a következőképpen: a *2. ábrán* AC és BD metszéspontja M, és megszerkesztettük az $ABM\triangle$ és a $DCM\triangle$ köré írt kört. Tegyük fel, hogy ez a két kör M-en kívül még egy P pontban is metszi egymást. Bebizonyítjuk, hogy a P pont megfelel a forgatva nyújtás középpontjának. Az $MAPB$ húrnégyszög révén $CAP\sphericalangle=DBP\sphericalangle$. Hasonlóan az $MDPC$ húrnégyszögből $ACP\sphericalangle=BDP\sphericalangle$. Ezért az $APC\triangle$ hasonló a $BPD\triangle$-höz, és P körüli forgatva nyújtással egymásba vihetők át. Hasonlóan vizsgálható az az eset, amikor M az AC és BD szakaszok közös pontja, továbbá ha az $ABM\triangle$ és $DCM\triangle$ köré írt körök érintik egymást, amikor is P azonos M-mel.

Elek Péter (Bp., Árpád Gimn., III. o.t.)




M
B
C
P
A
D