Legyen $M$ azoknak a pozitív egészekből álló $(x,y)$ számpároknak a száma, amelyekre $x^2y \le N^2$. Megmutatjuk, hogy mindkét oldalon $M$ áll.

Először megjegyezzük, hogy minden számpárban $x \le N$ és $y \le N^2$.

Csoportosítsuk a számpárokat az első tagjuk szerint. Ha $1 \le x \le N$ rögzített, akkor $y$-ra az $1 \le y \le \dfrac{N^2}{x^2}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Az ilyen $y$-ok száma $\left[\dfrac{N^2}{x^2}\right]$. Ezeket minden $x$-re összeadva kapjuk, hogy

$$M=\sum_{x=1}^{N}\left[\frac{N^2}{x^2}\right]=\left[\frac{N^2}{1^2}\right]+\left[\frac{N^2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{N^2}{(N-1)^2}\right]+\left[\frac{N^2}{N^2}\right].$$

Csoportosítsuk a párokat most a második tagjuk szerint. Ha $1 \le y \le N^2$ rögzített, akkor $x$-et úgy kell választanunk, hogy $1 \le x^2 \le \dfrac{N^2}{y}$, azaz $1 \le x \le \dfrac{N}{\sqrt{y}}$ teljesüljön. Az ilyen $x$-ek száma $\left[\dfrac{N}{\sqrt{y}}\right]$, ezért

$$M=\sum_{y=1}^{N^2}\left[\frac{N}{\sqrt{y}}\right]=\left[\frac{N}{\sqrt{1}}\right]+\left[\frac{N}{\sqrt{2}}\right]+\cdots+\left[\frac{N}{\sqrt{N^2-1}}\right]+\left[\frac{N}{\sqrt{N^2}}\right].$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.