

Először megmutatjuk, hogy az e' egyenes mindig merőleges a gömb középpontja és e által alkotott síkra.

Jelöljük a gömb középpontját O -val. Az 1. ábrán e merőleges a papírlap síkjára és azt P -ben metszi. Ha az (O, e) síkra tükrözzük az e -re illeszkedő egyik érintősíkot, akkor az e -re illeszkedő másik érintősíkot kapjuk, mert a tükrözésnél e -nek és a gömbnek a képe önmaga, érintősík képe pedig érintősík kell legyen. Ezért E_1 tükörképe E_2 , tehát az $E_1E_2 = e'$ egyenes merőleges az (O, e) síkra.

Ezért, ha f és g két olyan metsző egyenes, hogy O , f és g mind egy síkban vannak, akkor f' és g' egymástól különbözőek, és mindkét merőlegesek erre a síkra. Tehát ebben az esetben f' és g' párhuzamosak.

Ugyanezért, ha az (O, f) és (O, g) síkja egymástól különböző, f' és g' nem lehetnek párhuzamosak.

Megmutatjuk

viszont,

hogy f' és g' mindig egy síkban van.

Legyen f és g metszéspontja P , az f -re, illetve g -re illeszkedő két-két érintősík és a gömb közös pontja pedig F_1 , F_2 , G_1 és G_2 . Ekkor a PF_1 , PF_2 , PG_1 és PG_2 a gömbhöz P -ből húzott érintőegyenesek. Egy külső pontból egy gömbhöz húzott érintőegyenesek érintési pontjai a gömbön egy kört alkotnak, tehát egy síkban vannak. Azaz F_1 , F_2 , G_1 és G_2 egy síkban van, vagyis f' és g' is egy síkban van.

Összefoglalva: f' és g' mindig egy síkban van. Ha az (f, g) sík átmege O -n, akkor f' és g' párhuzamos egyenesek, ha pedig az (f, g) sík nem tartalmazza O -t, akkor f' és g' szükségképpen metszik egymást,

Zábrándi Zoltán (Győr, Bencés Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

