Jelöljük a hasáb csúcsait A, B, C, D, E, F, G, H-val az *1. ábra* szerint, és legyen $HBD\sphericalangle = 45°$. Ekkor nyilván $BHF\sphericalangle$ is $45°$. Általában is a testátló a végpontjain átmenő párhuzamos lapok azon átlójával, amely a testátló végpontjából indul ki, mindig ugyanakkora szöget zár be. A négyzet oldalait tekinthetjük egységnyinek, ekkor a négyzet átlóinak, így a hasáb oldaléleinek hossza is $\sqrt{2}$, a testátló hossza 2, az oldallapok átlóinak hossza $\sqrt{3}$ egység.

Először számítsuk ki a HB testátlónak az AC lapátlóval bezárt szögét. Mivel a két egyenes kitérő, hajlásszögük megegyezik azon két egyenes hajlásszögével, amelyet úgy kapunk, hogy AC-t önmagával párhuzamosan eltoljuk, míg HB-t nem metszi. Messük el a hasábot az O középpontján átmenő, alapsíkkal párhuzamos síkkal. A sík az AE élt az M, a CG élt az N pontban metszi. Az MN szakasz párhuzamos AC-vel, és az O pontban metszi HB-t. Az $MHNB$ négyszög oldalai egyenlő hosszúak (a hasáb egy csúcsát az oldallapon vele szemköztes él felezőpontjával összekötő szakaszok), amiből következik, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra. A HB testátló tehát az AC lapátlóval $90°$-os szöget zár be.

Másodjára a

$$HBG\sphericalangle = AHB\sphericalangle = HBE\sphericalangle = BHC\sphericalangle$$

szögeket számítjuk ki.

A keresett szögek mindegyike egy 2, 1, $\sqrt{3}$ egység oldalú háromszögnek az 1 egységnyi oldallal szemben fekvő szöge (*2. ábra*).

Könnyű belátni, hogy egy ilyen háromszög éppen a fele egy 2 egység oldalú szabályos háromszögnek, amiből következik, hogy a keresett szög $30°$ (*3. ábra*).

A hátralevő ED, FC, GD, FA lapátlók ismét egyenlő szögeket zárnak be HB-vel. Ezek közül a HB és ED egyenesek szögét számítjuk ki. Toljuk el az $ADHE$ síkot önmagával párhuzamosan az EF él felezőpontjába (*4. ábra*). Ekkor $E'D' \parallel ED$, $E'D'$ és HB metszéspontja O. Az OHE' háromszögben $OH = 1$, $OE' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, HE' hossza pedig az EHE' derékszögű háromszögből:

$$HE' = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

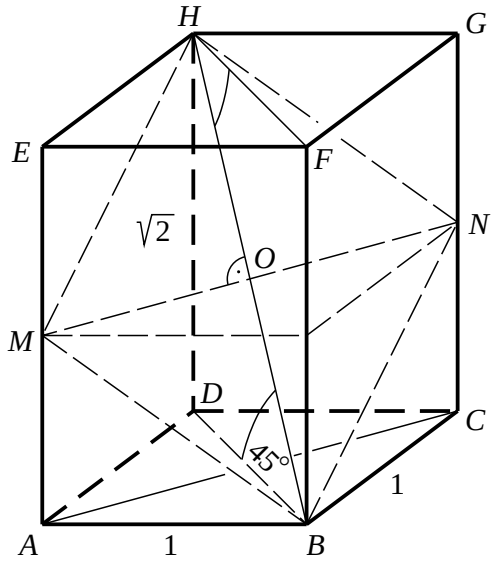
A HOE' háromszögben írjuk fel a koszinusz tételt a $HOE'\sphericalangle = \beta$ szögre.

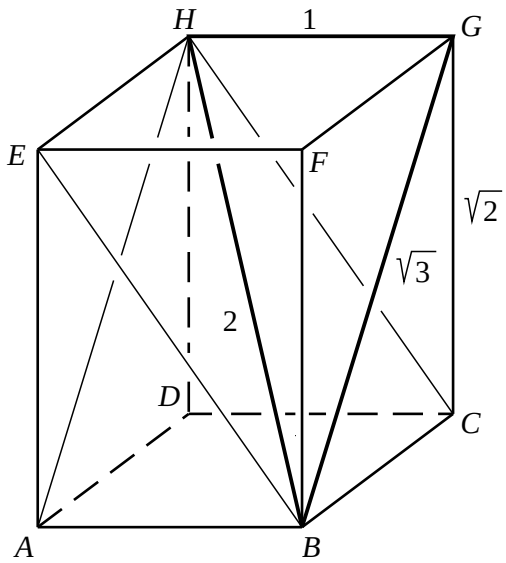
$$\cos\beta = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

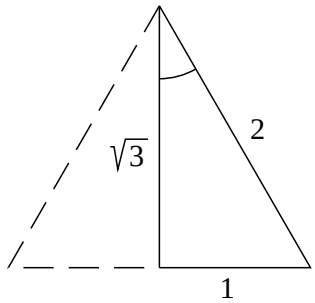
ahonnan $\beta \approx 73,2°$.

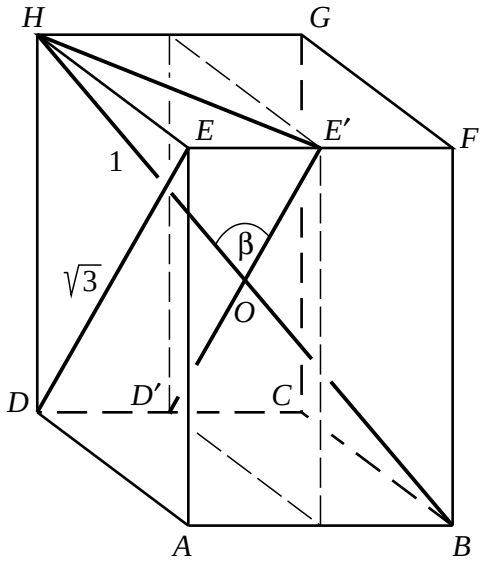
Összegezve: a HB testátló a BD és HF átlókkal $45°$-os szöget, az AC és EG átlókkal $90°$-os szöget, a BG, HA, BE, HC átlókkal $30°$-os szöget, az ED, FC, GD, FA átlókkal $73,2°$-os szöget zár be.

Méder Áron (Budapest, Táncsics M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján




H
1
G
E
F
√2
√3
2
D
C
A
B


√3
2
1


H
G
E
E′
F
1
β
√3
O
D
D′
C
A
B