

Az egymást páronként érintő $a/2$ sugarú körök 120° -os forgatással egymásba vihetők, ezért területük egyenlő. A körök egy része, egy körcikk és két kis körszelet esik a körülírt körbe. Először a körcikket egyikének, az AED -nek a területét fogjuk kiszámítani. Ehhez ismernünk kell a körcikket alkotó szöget, illetőleg – a tengelyes szimmetria miatt – elegendő a felét meghatározni, jelöljük ezt β -val. Összesen 6 ilyen β szögű körcikk esik a körbe. Ezenkívül a lefedett rész még 6 darab, az ábrán bevonalkázott AD körszelettel egybevágó részből áll. Ez utóbbiak területét az AOD körcikk $AOD \sphericalangle = \alpha$ szögének ismeretében számítjuk ki.

Tekintsük az AOD háromszöget, ahol O a körülírt kör középpontja. Mivel a háromszög szabályos, körülírt körének sugara a magasságának $2/3$ része, azaz $r = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Írjuk fel az AOD háromszög β szögére a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \\ &= \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

ahonnan $\cos \beta = 0,4330$, $\beta \approx 64^\circ 20'$, radiánokban:

$$\begin{aligned} 360^\circ : 2\pi &= 64,34^\circ : \beta, \\ \beta &= 1,1230 \text{ radián.} \end{aligned}$$

Egy körcikk területe:

$$(1) \quad \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 1,1230}{2} = a^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1,1230.$$

A körszeletek területe $\frac{1}{2}r^2(\hat{\alpha} - \sin \alpha)$, ahol $\hat{\alpha}$ az α szög radiánokban kifejezett értéke. (A képletet megtalálhatjuk a függvénytáblázatban, de enélkül is meghatározhatjuk a területet a körcikk és a háromszög területének ismeretében.)

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - 2 \cdot 64,34^\circ = 51,32^\circ, \\ \text{radiánokban kifejezve: } &0,8957. \end{aligned}$$

$$(2) \quad T_{\text{körszelet}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 (0,8957 - \sin 51,32^\circ) = \frac{1}{6}a^2 \cdot 0,1150.$$

A körülírt kör területe: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \pi$.

Végül, (1) és (2) 6-szorosának összegét elosztva a körülírt kör területével, kapjuk a keresett arányt:

$$\frac{6 \left(a^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1,1230 + \frac{1}{6}a^2 \cdot 0,1150\right)}{\frac{a^2}{3} \cdot \pi} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 1,1230 + 0,1150}{\frac{\pi}{3}} \approx 0,9140$$

Azaz a körök a körülírt kör területének több mint 9/10-ét fedik le. (A számításokat 4 tizedesjegy pontossággal végeztük.)

