Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. Legyen $AB = BP = DP = a$, $AD = BC = AP = 1$ és $DAP\sphericalangle = \alpha$. A feltételek szerint az $ADP\triangle$ és $ABP\triangle$ egyenlő szárú, és mindkét háromszög szögei α-val kifejezhetők. Az AF és BG magasságok meghúzása után keletkező derékszögű háromszögekből $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$, illetve $\sin\alpha = \frac{1}{2a}$. Ha létezik olyan α szög és a pozitív szám, amelyek kielégítik ezeket az egyenleteket, akkor a feladat feltételeinek megfelelő téglalap is létezik. A két egyenlet szorzatából

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \text{azaz} \sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}, \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \cos^3\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8} = 0.$$

Az $f(\alpha) = \cos^3\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}$ függvény folytonos, az $\alpha = 0$ helyen pozitív, hiszen $f(0) = \frac{1}{8}$, az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ helyen pedig negatív, hiszen $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8} < 0$. Ezért Bolzano tétele szerint a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban van olyan α_0 szög, amelyre $f(\alpha_0) = 0$. Tehát a feladatban kérdezett téglalap létezik. Pontosabb függvényvizsgálattal belátható, hogy egyetlen ilyen α_0 létezik, és $\alpha_0 \approx 43°$, innen a téglalap kisebbik oldala $a \approx 0,733$.

Kováts Antal (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Eredményünk azt jelenti, hogy a kapott $ABCD$ téglalapban az A körüli és D-n átmenő, a D körüli és C-n átmenő, végül a B körüli és A-n átmenő körök egy P ponton mennek át (*2. ábra*).