Legyen a sorozatok száma $n$, differenciáik $d_1$, $d_2$, $\ldots$, $d_n$. Mivel a sorozatok monoton nőnek, a differenciák nemnegatívak; mivel pedig létezik a reciprokuk, csak pozitívak lehetnek.

Legyen $N$ pozitív egész. Becsüljük meg, hogy az egyes sorozatok az 1, 2, $\ldots$, $N$ számok közül legfeljebb hányat tartalmazhatnak. Tegyük fel, hogy a $k$-adik sorozat $h_k$ egészt tartalmaz a felsorolt számok közül. Ezek közül a legnagyobb és a legkisebb különbsége legfeljebb $N-1$, másrészt – mivel egy $d_k$ differenciájú számtani sorozatról van szó –, legalább $(h_k-1)d_k$. Következésképp $(h_k-1)d_k \le N-1 < N$, amiből

$$h_k < \frac{N}{d_k} + 1.$$

Ha ezt minden $k$-ra összeadjuk, azt kapjuk, hogy az $n$ számtani sorozat összesen legfeljebb

$$h_1 + \cdots + h_n < \frac{N}{d_1} + \cdots + \frac{N}{d_n} + n$$

$N$-nél nem nagyobb pozitív egészt tartalmaz. Ha ezt $N$-ből kivonjuk, egy alsó becslést kapunk azoknak a természetes számoknak a számára, amelyek egyik számtani sorozatban sem szerepelnek: ezek száma nagyobb, mint

$$N - \left(\frac{N}{d_1} - \cdots - \frac{N}{d_n} + n\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}\right)\right) N - n.$$

A feladat feltétele szerint az $N$ együtthatója pozitív, az utolsó tag, $n$ konstans, ezért ez a szám tetszőlegesen nagy lehet.

*Megjegyzések.* 1. Ha a differenciák egészek, a megoldás egyszerűbben is elmondható. Ilyenkor tetszőleges $N$ számra a számtani sorozatok az $N+1$, $N+2$, $\ldots$, $N + d_1 d_2 \ldots d_n$ számok közül összesen legfeljebb

$$\left(\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}\right) d_1 \ldots d_n < d_1 \ldots d_n$$

darabot tartalmazhatnak, vagyis legalább egy kimarad.

Az általános esetet nem nehéz a csupa egész differencia esetére visszavezetni.

2. Ha a differenciák reciprokösszege 1, akkor a sorozatok tartalmazhatják az összes pozitív egészt. Ehhez szükséges, hogy a differenciák egészek, a sorozatok pedig diszjunktak legyenek.

Ismert eredmény (lásd pl. a KöMaL 1986. áprilisi számának 154. oldalán), hogy ilyenkor mindig van legalább két egyforma differencia.