A megoldás során felhasználjuk a „Játék mindenkinek" rovatunkhoz fűzött megjegyzésekben olvashatókat. (KöMaL 1994/8–9. sz., 430–432. o.)

Terjesszük ki p_n definícióját $n = 0, -1, -2, -3$-ra a következőképpen:

$$p_{-1} = p_{-2} = p_{-3} = 0, \quad p_0 = 1. \tag{1}$$

(Ezeknek teljesen szemléletes jelentése van.) Világos, hogy az n-edik mezőre az $(n-1)$-edik, $(n-2)$-edik, $(n-3)$-adik és $(n-4)$-edik mezőről léphetünk, a megfelelő utolsó dobás valószínűsége $\frac{1}{4}$, ezért a teljes valószínűség tétele alapján

$$p_n = \frac{1}{4}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{4}p_{n-3} + \frac{1}{4}p_{n-4} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

vagyis

$$p_n - \frac{1}{4}p_{n-1} - \frac{1}{4}p_{n-2} - \frac{1}{4}p_{n-3} - \frac{1}{4}p_{n-4} = 0. \tag{2}$$

E sorozat karakterisztikus polinomja:

$$p(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Legyenek a $p(x) = 0$ egyenlet gyökei, ideértve a komplexeket is, z_1, z_2, …, z_k, multiplicitásuk rendre α_1, α_2, …, α_k, azaz $p(x)$ gyöktényezős alakja

$$p(x) = (x - z_1)^{\alpha_1}(x - z_2)^{\alpha_2} \ldots (x - z_k)^{\alpha_k}.$$

Ismeretes, hogy a (p_n) sorozat n-edik eleme

$$p_n = a_1(n)z_1^n + a_2(n)z_2^n + \ldots + a_k(n)z_k^n \tag{3}$$

alakú, ahol $a_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ valamilyen α_i-nél alacsonyabb fokú polinom; és megfordítva, ha a sorozat ilyen alakú, akkor igaz rá a rekurzió.

A $p(x)$ polinom egyik gyöke az 1, és ez csak egyszeres gyök, mert

$$p(x) = (x - 1)\left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right), \tag{4}$$

és a második tényezőnek az 1 nem gyöke. A többi gyök abszolút értékben 1-nél kisebb, mert $|x| \geq 1$ esetén $|p(x)| \geq |x|^4 - |x|^3 \geq 0$, és egyenlőség csak akkor van, ha $x = 1$. Így a_1 konstans polinom, és a (3) többi tagja zérushoz tart, ha n tart a végtelenhez.

Most meghatározzuk a_1-et, ami az előbbiek alapján a p_n sorozat határértéke. Definiáljuk a q_n sorozatot a következőképpen:

$$q_n = a_2(n)z_2^n + \ldots + a_k(n)z_k^n = p_n - a_1. \tag{5}$$

A q_n sorozatra (4) miatt fennáll, hogy

$$q_n + \frac{3}{4}q_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-2} + \frac{1}{4}q_{n-3} = 0,$$

azaz

$$(p_n - a_1) + \frac{3}{4}(p_{n-1} - a_1) + \frac{1}{2}(p_{n-2} - a_1) + \frac{1}{4}(p_{n-3} - a_1) = 0.$$

Behelyettesítve $n = 0$-t,

$$(1 - a_1) + \frac{3}{4}(0 - a_1) + \frac{1}{2}(0 - a_1) + \frac{1}{4}(0 - a_1) = 0,$$

amiből $a_1 = \frac{2}{5}$. Tehát

$$\lim p_n = \frac{2}{5}. \tag{6}$$

Megbecsüljük a konvergencia sebességét. Mivel

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6},$$

a q_n sorozatra a

$$q_n + \frac{1}{12}q_{n-1} - \frac{1}{12}q_{n-3} - \frac{1}{6}q_{n-4}$$

rekurzió is teljesül. Ebből következik, hogy

$$|q_n| \le \frac{1}{12}|q_{n-1}| + \frac{1}{12}|q_{n-3}| + \frac{1}{6}|q_{n-4}| \le \frac{1}{3}\max\left(|q_{n-1}|, |q_{n-3}|, |q_{n-4}|\right).$$

Bebizonyítjuk, hogy $|q_n| \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n/4}$. Ez $n = -3, -2, -1, 0$ esetén könnyen ellenőrizhető. Ha pedig igaz $n < m$ esetén ($m = 1, 2, \ldots$), akkor

$$|q_m| \le \frac{1}{3}\max\left(|q_{m-1}|, |q_{m-3}|, |q_{m-4}|\right) \le \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m-4}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m}{4}}.$$

Ha $n = 100$-at behelyettesítünk, akkor

$$|q_{100}| = |p_{100} - a_1| = |p_{100} - 0{,}4| \le \left(\frac{1}{3}\right)^{25} < 10^{-6},$$

vagyis

$$0{,}399\,999 < p_{100} < 0{,}400\,001.$$

Megjegyzések. 1. Ha d lapú dobókockával dobunk, azaz egyforma valószínűséggel lépünk $1, 2, \ldots, d-1$ vagy d mezőt, akkor is megoldható a feladat. ($d = 6$-ra a megoldás már megjelent a KöMaL 1994/8–9. számának 430–432. oldalán.)

Általánosításunk teljes egészében a fent ismertetett gondolatmenetet fogja követni.

Legyen p_n annak valószínűsége, hogy rálépünk az n-edik mezőre és legyen $p_0 = 1$, $p_{-1} = p_{-2} = \ldots = p_{-d} = 0$.

Ekkor világos, hogy $n = 0, 1, \ldots$ esetén

$$p_n = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d} p_{n-i},$$

vagyis

$$p_n - \frac{1}{d}p_{n-1} - \frac{1}{d}p_{n-2} - \ldots - \frac{1}{d}p_{n-d} = 0.$$

Most

$$p(x) = x^d - \frac{1}{d}x^{d-1} - \frac{1}{d}x^{d-2} - \ldots - \frac{1}{d}.$$

Ennek egyik gyöke $z_1 = 1$, a többi gyök abszolút értéke 1-nél kisebb. A $z_1 = 1$ multiplicitása, $\alpha_1 = 1$, mert

$$p(x) = (x-1)\left(x^{d-1} + \frac{d-1}{d}x^{d-2} + \frac{d-2}{d}x^{d-3} + \ldots + \frac{1}{d}\right),$$

és a második tényező $x = 1$ esetén pozitív.

A $q_n = p_n - a_1$ sorozatra teljesül, hogy

$$q_n + \frac{d-1}{d}q_{n-1} + \frac{d-2}{d}q_{n-2} + \ldots + \frac{1}{d}q_{n-d} = 0,$$

azaz

$$(p_n - a_1) + \frac{d-1}{d}(p_{n-1} - a_1) + \frac{d-2}{d}(p_{n-2} - a_1) + \ldots + \frac{1}{d}(p_{n-d} - a_1) = 0.$$

Behelyettesítve $n = 0$-t,

$$(1 - a_1) + \frac{d-1}{d}(0 - a_1) + \frac{d-2}{d}(0 - a_1) + \ldots + \frac{1}{d}(0 - a_1) = 0,$$

amiből

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{2}{d} + \ldots + \frac{d}{d}} = \frac{2}{d+1}.$$

Tehát

$$\lim p_n = \frac{2}{d+1}.$$

A $|q_n|$ megbecsüléséhez:

$$\left(x - \frac{d-2}{d-1}\right)\left(x^{d-1} + \frac{d-1}{d}x^{d-2} + \frac{d-2}{d}x^{d-3} + \ldots + \frac{1}{d}\right) =$$

$$= x^d + \frac{1}{d(d-1)}x^{d-1} - \frac{1}{d(d-1)}x^{d-3} - \frac{2}{d(d-1)}x^{d-4} - \ldots - \frac{d-2}{d(d-1)},$$

amiből q_n-re

$$q_n + \frac{1}{d(d-1)}q_{n-1} - \frac{1}{d(d-1)}q_{n-3} - \frac{2}{d(d-1)}q_{n-4} - \ldots - \frac{d-2}{d(d-1)}q_{n-d} = 0,$$

ahonnan

$$|q_n| \leq \frac{1+1+2+\ldots+(d-2)}{d(d-1)} \max\left(|q_{n-1}|, |q_{n-3}|, \ldots, |q_{n-d}|\right) <$$
$$< \left(1 - \frac{2d-4}{d(d-1)}\right) \max\left(|q_{n-1}|, |q_{n-3}|, \ldots, |q_{n-d}|\right).$$

Innen pedig

$$\left|p_n - \frac{2}{d+1}\right| = |q_n| \leq \left(1 - \frac{2d-4}{d(d-1)}\right)^{\frac{n}{d}}.$$

Ez a becslés 0-hoz tart $d \geq 3$ esetén. (Ha $d = 1$, akkor az állítás triviális. Ha $d = 2$, akkor $z_2 = -\frac{1}{2}$ és $|q_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.)

Farkas Péter (Budapest, Szent István Gimn., IV. o. t.)

2. A megoldásban felírt összefüggéseket a lineáris rekurzív sorozatok elméletére való hivatkozás nélkül is be lehet bizonyítani, többnyire teljes indukcióval.

Induljunk ki a (2) összefüggésből, ennek alapján bebizonyítjuk a

$$\left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) = 0 \qquad (7)$$

azonosságot. Ez $n = 0$-ra, mint láttuk, igaz. Ha pedig igaz $n = m-1$-re, akkor

$$\left(p_m - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{m-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{m-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{m-3} - \frac{2}{5}\right) =$$
$$= \left(p_m - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{m-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{m-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{m-3} - \frac{2}{5}\right) -$$
$$- \left(p_m - \frac{1}{4}p_{m-1} - \frac{1}{4}p_{m-2} - \frac{1}{4}p_{m-3} - \frac{1}{4}p_{m-4}\right) =$$
$$= \left(p_{m-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{m-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{m-3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{m-4} - \frac{2}{5}\right) = 0.$$

Ezzel (7)-et igazoltuk. Írjuk fel (7)-et $n-1$-re is:

$$\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{n-4} - \frac{2}{5}\right) = 0 \qquad (8)$$

Vonjuk ki (7)-ből (8) $\frac{2}{3}$-szorosát:

$$\left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) -$$
$$-\frac{2}{3}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{6}\left(p_{n-4} - \frac{2}{5}\right) =$$
$$\left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{12}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{12}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{6}\left(p_{n-4} - \frac{2}{5}\right) = 0.$$

Ezzel az összes szükséges azonosságot igazoltuk.

3. Tegyük fel, hogy a lehetséges lépéshosszok a $h_1 < \ldots < h_d$ pozitív egészek, ezek valószínűsége $q_1, \ldots, q_d > 0$. Legyen p_n továbbra is annak valószínűsége, hogy rálépünk az n-edik mezőre. Bebizonyítjuk, hogy ha a p_n sorozat konvergens, akkor határértéke

$$\lim p_n = \frac{1}{q_1h_1 + q_2h_2 + \ldots + q_dh_d}.$$

(Azt nem nehéz bebizonyítani, hogy p_n akkor konvergens, ha a $h_1, \ldots, h_d$ számoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztója.)

Definiáljuk az $X_0, X_1, \ldots$ véletlen mennyiségeket (valószínűségi változókat) a következőképpen:

$$X_n = 0, haaz$$

n$-edikmezrenemlpnkr; i, haaz$n$-edikmezrerlpnksott$i$-tdobunk.$

Ekkor $X_0 + X_1 + \ldots + X_m$ az első m mezőn tett lépések összege, vagyis az első olyan mező sorszáma, amely az m-edik után van és rálépünk. Ez biztosan $m+1$ és $m+h_d$ között van, tehát

$$m + 1 \leq X_0 + X_1 + \ldots + X_m \leq m + h_d.$$

Ebből következik, hogy az összeg várható értéke is e két határ között van:

$$m + 1 \leq E(X_0 + X_1 + \ldots + X_m) = E(X_0) + E(X_1) + \ldots + E(X_m) \leq m + h_d.$$

(A várható értéket mindig lehet tagonként számolni.)

Mivel

$$E(X_n) = p_n q_1 \cdot h_1 + p_n q_2 \cdot h_2 + \ldots + p_n q_d \cdot h_d = p_n(q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d),$$

ez azt jelenti, hogy

$$m + 1 \leq (p_0 + p_1 + \ldots + p_m)(q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d) \leq m + h_d,$$

amit $(m+1)(q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d)$-vel osztva

$$\frac{1}{q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d} \leq \frac{p_0 + p_1 + \ldots + p_m}{m+1} \leq \left(1 + \frac{h_d - 1}{m+1}\right) \frac{1}{q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d}.$$

Mivel $m \to \infty$ esetén

$$\left(1 + \frac{h_d - 1}{m+1}\right) \to 1,$$

ebből következik, hogy

$$\lim \frac{p_0 + p_1 + \ldots + p_m}{m+1} = \frac{1}{q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d}.$$

Ismeretes, hogy ha p_n konvergens, akkor $\lim \dfrac{p_0 + p_1 + \ldots + p_m}{m+1}$ is konvergens és ugyanoda tart, ezért a (p_n) sorozat határértéke csak $\dfrac{1}{q_1 h_1 + \ldots + q_d h_d}$ lehet.

Pataki János, Duino (Olaszország)