Az **F. 3026.** feladatban[10] bebizonyítottuk, hogy a parabola fókuszán átmenő tetszőleges húr végpontjaiban a parabolához húzott érintők merőlegesek egymásra, és metszéspontjuk a vezéregyenesen van. Megmutatjuk, hogy érvényes ennek a tételnek a megfordítása is, éspedig: a parabola egymásra merőleges érintőinek érintési pontjait összekötő húr átmegy a fókuszon.

Legyen a két érintési pont A és B, és ezekben a pontokban a parabolához húzott érintők merőlegesek (*1. ábra*). Az A-ba húzott érintő messe a vezéregyenest a P pontban, az AF egyenes messe a parabolát a B'-ben. A 3026. feladat állítása szerint B'-ben a parabolához húzott érintő az AP érintőt P-ben metszi, és a két érintő merőleges egymásra. Mivel a B-ben a parabolához húzott érintő is merőleges AP-re, azért $B \equiv B'$, ugyanis egy parabolának nincsen két egymással párhuzamos érintője. (Ez következik pl. abból, hogy a másodfogú függvények deriváltja szigorúan monoton.) Ezután felhasználhatjuk, hogy a két érintő érintési pontjait összekötő szakasz átmegy F-en, továbbá az érintők a vezéregyenesen metszik egymást, és merőlegesek. A *2. ábra* jelöléseit használva $AF = AD$, és ismeretes, hogy az AP érintő felezi az FAD szöget. Ezért $ADP\triangle \cong AFP\triangle$, amiből következik, hogy $AFP\sphericalangle = 90°$. Azt is láthatjuk, hogy $a^2 + b^2 = AB^2$, ezért a bizonyítandó állítás:

$$a^4b^4 = AB^6. \tag{1}$$

Az $APB\triangle$ kétszeres területe: $2t = a \cdot b = AB \cdot PF$, amiből $(2t)^4 = a^4b^4 = AB^4 \cdot PF^4$. Ennek és (1)-nek alapján az igazolandó állítás így írható: $AB^4 \cdot PF^4 = AB^6$, azaz

$$PF^2 = AB.$$

Ennek igazolásához írjuk fel az ABP derékszögű háromszögben a magasságtételt: $PF^2 = AF \cdot FB$. Mivel $AB = AF + FB$, elég azt belátnunk, hogy

$$AF \cdot FB = AF + FB.$$

Ez az egyenlet így is írható: $(AF - 1)(FB - 1) = 1$, ami a parabola definícióját is fölhasználva:

$$(AD - 1)(BC - 1) = 1. \tag{2}$$

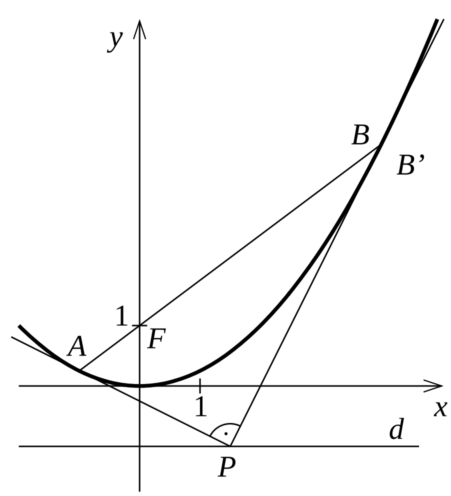
Legyen A, illetve B első koordinátája x_1, ill. x_2. Ekkor $AD = \frac{1}{4}x_1^2 + 1$, $BC = \frac{1}{4}x_2^2 + 1$, hiszen a vezéregyenes egyenlete $y = -1$. AD és BC így kiszámított kifejezéseit (2)-be helyettesítve a bizonyítandó állítás:

$$\frac{1}{16}x_1^2 \cdot x_2^2 = 1. \tag{3}$$

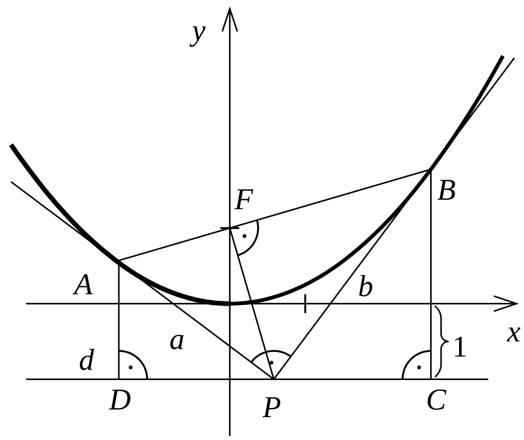
Az $y = \frac{1}{4}x^2$ függvény deriváltja $y' = \frac{1}{2}x$, ezért az A pontba húzott érintő iránytangense $\frac{1}{2}x_1$, a B pontbelié $\frac{1}{2}x_2$. A két érintő merőleges, ezért $\frac{1}{4}x_1 \cdot x_2 = -1$. Ezt négyzetre emelve a bizonyítandó állítással ekvivalens (3) egyenlőséget kapjuk.

Valkó Benedek (Fazekes M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Hivatkoztunk az $y = \frac{1}{4}x^2$ függvény deriváltjára, illetve iránytangensére. Elemi úton is megmutatható, hogy az $y = a \cdot x^2$ egyenletű parabola x_0 pontbeli érintőjének iránytangense $m = 2a \cdot x_0$. (Bizonyítása megtalálható pl. Bogdán Zoltán: Matematikai feladatok – ötletek – megoldások c. könyv 43. oldalán.)



[0] A KöMaL 1995/3 számának 149. oldalán



y
F
B
A
b
x
a
1
d
D
P
C