I. megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen a körszeletekbe írt körök területe t_1, ill. t_2. Thalész tétele szerint $x^2+y^2=r^2$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} t_1+t_2=\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)&= \\ =\pi\left[\left(\frac{r-x}{2}\right)^2+\left(\frac{r-y}{2}\right)^2\right]&= \\ =\frac{\pi}{4}\left[2r^2+x^2+y^2-2r(x+y)\right]&= \\ =\frac{\pi}{4}\left[3r^2-2r(x+y)\right]&. \end{aligned}$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{r}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{x+y}{2}, \tag{1}$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}\left[3r^2-2r(x+y)\right]&\geq \\ \geq\frac{\pi}{4}\left(3r^2-2r\cdot r\sqrt{2}\right)&= \\ =\frac{r^2\cdot\pi}{4}(3-2\sqrt{2})&. \end{aligned}$$

Ebből láthatjuk, hogy a területösszeg $\frac{r^2\pi}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$-nél nem lehet kisebb. Ezt az értéket föl is veszi, ha $x=y$, azaz ha P felezi az AB ívet.

A háromszögegyenlőtlenség szerint $2x+2y>2r$ minden lehetséges P-re, ezért t_1+t_2-nek maximuma csak az elfajuló $2x+2y=2r$ esetben lehetne, amit a feladat szövege kizár. Maximum tehát nincs, csak legkisebb felső korlát: $t_1+t_2<\frac{r^2\pi}{4}$. Az elfajuló esetben $r_1=\frac{r}{2}$, $r_2=0$ vagy fordítva.

Farkas Péter (Budapest, Szent István Gimn., IV. o.t.) és *Lovász Zoltán* (Bonyhád, Perczel Mór Közg., Szki., IV. o.t.) dolgozatai alapján

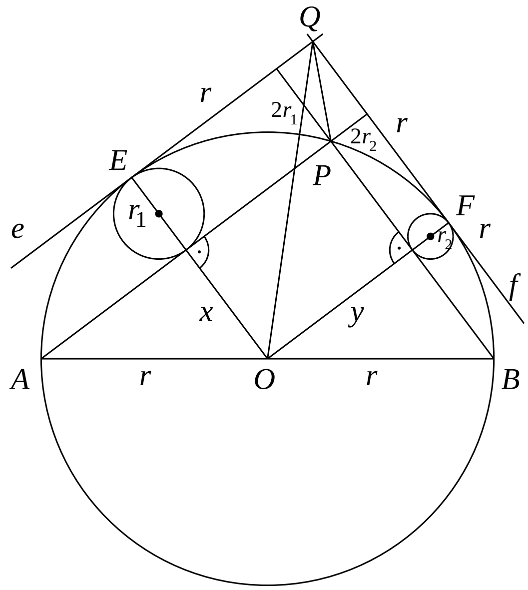
II. megoldás. Vegyük figyelembe, hogy egy kör területe ugyanakkor a legnagyobb vagy legkisebb, amikor a kerülete. Ezért $k_1+k_2=\pi(r-x+r-y)=\pi(2r-(x+y))$ szélsőértékeit kereshetjük. A megoldást az (1) egyenlőtlenség alapján az I. megoldáshoz hasonlóan kapjuk.

Kardkovács Zsolt Tivadar (Budapest, Károlyi M. Gimn., IV. o.t.)

III. megoldás. Az *ábrán* az AP-vel párhuzamos e érintő és a BP-vel párhuzamos f érintő a Q pontban metszi egymást. Nyilván az $EQF\sphericalangle=90^\circ$, tehát Q-ból az AB átmérőjű kör 90°-os szögben látszik. Ezért $QE=QF=r$ állandó, de akkor OQ is állandó. Az ábráról láthatjuk, hogy $PQ^2=4r_1^2+4r_2^2$, tehát PQ ugyanakkor minimális, amikor t_1+t_2. Ez akkor és csak akkor következik be, ha P illeszkedik OQ-ra, vagyis ha P az AB ív felezőpontja. Hasonlóan látható, hogy PQ akkor (lenne) a legnagyobb, ha PQ érinti a kört, azaz $P=F$ vagy $P=E$, vagyis $AP=0$ vagy $PB=0$.

Megjegyzések. 1. Lovász Zoltán megmutatta, hogy a két beírt kör területének összege akkor is az egyenlő szárú háromszög esetén lesz minimális, ha AB helyett egy tetszőleges húrt veszünk.

2. Farkas Péter P helyett a P_1, P_2, …, P_n pontokkal $n+1$ részre osztotta az AB félkörívet. Bebizonyította, hogy az így keletkezett $n+1$ körszeletbe írt maximális érintő körök területének összege akkor minimális, ha $AP_1=P_1P_2=\dots=P_nB$.



Q
r
2r1
2r2
r
E
P
F
e
r1
r2
r
f
x
y
A
r
O
r
B