Először vizsgáljuk meg, hogy milyen lapjai lehetnek egy ötlapú testnek. A lapok között nem lehet ötszög vagy ötnél több oldalú sokszög, mert ha ilyen volna, akkor annak minden oldalához csatlakozna a testnek 1–1 lapja, a lapok száma tehát legalább $1+5=6$ lenne. Ezért minden lap háromszög vagy négyszög.

Jelöljük a háromszögek számát h-val, a négyszögek számát n-nel, a test éleinek számát e-vel, csúcsainak számát pedig c-vel. A test minden éle egyúttal két oldallapnak is oldaléle, ezért

$$2e=3h+4n.$$

Ebből következik, hogy a háromszöglapok száma $h=\dfrac{2e-4n}{3}=2\cdot\dfrac{e-2n}{3}$, ami biztosan páros, mert h egész. Tehát csak $h=0$, 2 vagy 4 jön szóba, amiből sorra $n=5$, 3 vagy 1, így $e=10$, 9 vagy 8. A test minden csúcsában legalább 3 él találkozik, és minden élen pontosan 2 csúcs van, ezért $c\le\dfrac{2}{3}e$. Vagyis az egyes esetekben a csúcsok száma legfeljebb 6, 6, illetve 5. Vizsgáljuk meg a három lehetőséget.

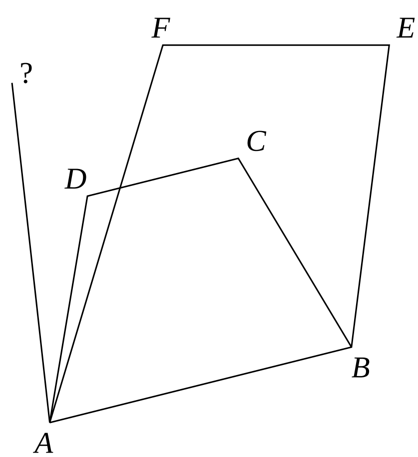
(i) A testnek 5 négyszöglapja, 10 éle és legfeljebb 6 csúcsa van. Ekkor $3c<2e$, ezért van olyan csúcs, amelyben legalább 4 él, s ezért legalább 4 lap találkozik. Jelöljük ezt a csúcsot A-val (*1. ábra*). Az A-t tartalmazó egyik négyszög további csúcsai legyenek B, C és D. Az AB élt egy $ABCD$-től különböző négyszöglap is tartalmazza, ennek további csúcsai legyenek E és F. E két csúcs nincs benne az $ABCD$ síkban, ezért az A, B, C, D, E és F pontok a testnek 6 különböző csúcsát alkotják. Mivel a testnek legfeljebb 6 csúcsa lehet, azért a testnek az A-ból kiinduló negyedik – azaz AB-től, AD-től és AF-től különböző – élén nem lehet további csúcs. Ez nyilvánvalóan ellentmondás, ezért ilyen test nem létezik.

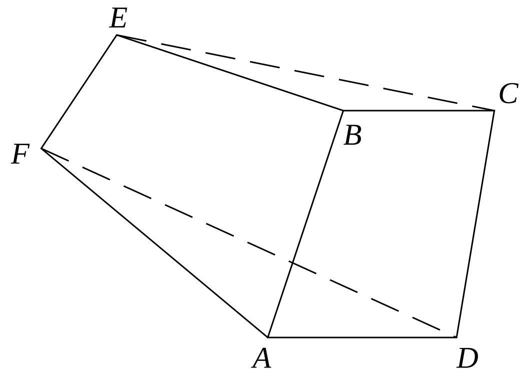
(ii) $n=3$, $h=2$ és $e=9$. Legyen $ABCD$ és $ABEF$ a test két szomszédos négyszöglapja (*2. ábra*). Mivel az öt lap közül három négyszög, azért ilyenek biztosan vannak. A testnek legfeljebb 6 csúcsa van, ezért nem lehet A, B, C, D, E, F-től különböző csúcsa. Ez azt jelenti, hogy a harmadik négyszöglap $CDEF$ kell legyen. Tehát a test két háromszöglapja egymással nem szomszédos, a négyszöglapok mindegyike pedig szomszédos a két másik négyszöggel és a két háromszöggel. Ezért a testnek 9 lapszöge van.

Megmutatjuk, hogy a lapszögek között legfeljebb 7 derékszög lehet. 7 derékszög található egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb lapszögei között (*3. ábra*), mert a három oldallap az alapra is és a fedőlapra is merőleges, az oldallapok egymással bezárt szögei pedig megegyeznek az alapháromszög szögeivel, tehát ezek között pontosan egy derékszög van. A lapszögek között 7-nél több derékszög nem lehet, mert akkor volna olyan háromszöglap, amelyre mind a három hozzá csatlakozó négyszög merőleges lenne, továbbá a négyszögek közül is legalább két pár egymásra merőleges lenne. De ebben az esetben a négyszöglapok egymással bezárt szögei definíció szerint megegyeznek a háromszöglap szögeivel, amelyek között nem lehet két derékszög.

(iii) $n=1$, $h=4$ és $e=8$. Ekkor a csúcsok száma 5, a test négyszög alapú gúla (*4. ábra*). Oldallapjai közül legfeljebb kettő lehet merőleges az alaplapra, mert ha három merőleges lenne, akkor azok metszésvonalai – amelyek a gúla oldalélei – egymással párhuzamosak lennének, hiszen merőlegesek volnának az alaplapra. Tehát a gúla 8 lapszöge közül legalább 2 nem derékszög, azaz a derékszögű lapszögek száma ebben az esetben kisebb, mint 7.

Ezzel beláttuk, hogy egy ötlapú test lapszögei közül legfeljebb 7 lehet derékszög.




E
C
B
F
A
D