

Mivel a körök középpontjai a háromszög csúcsai, eleve nem lehetséges, hogy mindhárom kör belülről érintkezzen, vagy hogy két kör belülről érintkezik, s a harmadik ezeket kívülről érintse, mert akkor a körök középpontjai egy egyenesen lennének.

Marad tehát a következő két eset:

I.: amikor a három kör kívülről érinti egymást,

II.: amikor két kör kívülről érintkezik, s ezek a harmadikat belülről érintik.

I. eset. Jelölje az  $A$ , a  $B$ , illetve a  $C$  pont köré írt kör sugarát rendre  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  (1. ábra). Tudjuk, hogy az érintési pontok a háromszög oldalain vannak, ezért (a szokásos jelölésekkel)

$$r_1 + r_2 = c, r_2 + r_3 = a, r_3 + r_1 = b.$$

Az egyenleteket összeadva  $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{a+b+c}{2}$ , ahonnan  $a$ ,  $b$  és  $c$  ismeretében meghatározhatjuk a körök sugarait. Elegendő egy kör sugarát, pl.  $r_1$ -et megszerkeszteni

$$r_1 = \frac{a+b+c}{2} - (r_2 + r_3) = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}.$$

Mivel  $b+c > a$  (a háromszög-egyenlőtlenség miatt),  $r_1 > 0$ . Ennek ismeretében a szerkesztés könnyen elvégezhető.

II. eset. Az előző jelöléseket megtartva az  $r_1$  és  $r_2$  sugarú körök kívülről érintkeznek, míg az  $r_3$  sugarú kört belülről érintik (2. ábra).

Az érintő körök középpontjai és érintési pontjuk egy egyenesen, a körök centrálisán van, így felírhatjuk, hogy

$$a + r_2 = r_3, b + r_1 = r_3, c = r_1 + r_2.$$

Innen  $r_3 = \frac{a+b+c}{2}$ . Az  $r_3$  ismeretében a köröket meg tudjuk szerkeszteni. Ezúttal három különböző megoldás van aszerint, hogy a belülről érintő kör középpontja az  $A$ ,  $B$  vagy a  $C$  csúcs. A másik kettőt magába záró kör sugara mindhárom esetben  $\frac{a+b+c}{2}$ .

*Megjegyzés.* A megoldók egy részének dolgozata hiányos, mert nem vizsgálták az összes lehetséges esetet. Szöveg nélküli ábrák – bármennyire is mutatják, hogy a megoldó helyesen gondolkodott – hiányos megoldásnak minősülnek.

