I. megoldás. Tetszőleges $k\ge 2$ egész számhoz konstruálunk olyan $P_k(x,y,z)$ polinomot, amelyre

$$P_k(t^k,t^{k+1},t+t^{k+2})=t. \tag{1}$$

Ez $k=1993$ esetén bizonyítja az állítást.

Legyen

$$\begin{aligned}P_k(x,y,z)&=z-zy+zy^2-\ldots+(-1)^{k-2}zy^{k-2}-(-1)^{k-2}x^k=\\&=z\left(1-y+y^2-\ldots+(-1)^{k-2}y^{k-2}\right)-(-1)^{k-2}x^k;\end{aligned}$$

ekkor

$$\begin{aligned}&P_k(t^k,t^{k+1},t+t^{k+2})=\\&\qquad=t(1+t^{k+1})\left(1-t^{k+1}+(t^{k+1})^2-(t^{k+1})^3+-\ldots+(-1)^{k-2}(t^{k+1})^{k-2}\right)-(-1)^{k-2}t^{k^2}=\\&\qquad=t\left(1+(-1)^{k-2}(t^{k+1})^{k-1}\right)-(-1)^{k-2}t^{k^2}=t+(-1)^{k-2}t^{(k+1)(k-1)+1}-(-1)^{k-2}t^{k^2}=t.\end{aligned}$$

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)

II. megoldás. Legyenek α, β, γ 1-nél nagyobb egészek, és legyenek α és β relatív prímek. Bebizonyítjuk, hogy létezik olyan $P(x,y,z)$ polinom, amelyre

$$P(t^\alpha,t^\beta,t+t^\gamma)=t.$$

Nevezzünk egy $f(t)$ polinomot előállíthatónak, ha létezik hozzá olyan $P_f(x,y,z)$ polinom, amelyre $P_f(t^\alpha,t^\beta,t+t^\gamma)=f(t)$ teljesül. A következőket állítjuk:

A) Ha $k\ge\alpha\beta$ egész szám, akkor t^k előállítható;

B) Ha k pozitív egész és t^{k+1}, t^{k+2}, t^{k+3}, … mindegyike előállítható, akkor t^k is előállítható.

Ezekből következik, hogy a t polinom is előállítható.

Az A) állítás bizonyítása. Megmutatjuk, hogy $k\ge\alpha\beta$ esetén léteznek olyan i,j nemnegatív egész számok, amelyekre $k=i\alpha+j\beta$. Ebből állításunk következik, mert $t^k=t^{i\alpha+j\beta}=(t^\alpha)^i(t^\beta)^j$, vagyis a $P(x,y,z)=x^iy^j$ polinom előállítja t^k-t.

Legyen tehát $k\ge\alpha\beta$ és tekintsük a $\beta,2\beta,\ldots,\alpha\beta$ egészeket. Mivel α és β relatív prímek, ezek a számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo α. Ezért létezik egy olyan $1\le j\le\alpha$ egész, amelyre $k\equiv j\beta\pmod{\alpha}$, vagyis $k-j\beta$ osztható α-val; létezik egy olyan i egész szám, amelyre $k-j\beta=i\alpha$. Mivel $k\ge\alpha\beta$, $i\alpha=k-j\beta\ge 0$, tehát i nemnegatív.

(A gondolatmenet kis módosításával bizonyítható, hogy már $k\ge(\alpha-1)(\beta-1)$ esetén is mindig léteznek megfelelő i,j nemnegatív egészek.)

A B) állítás bizonyítása. A binomiális tétel szerint

$$(t+t^\gamma)^k=\binom{k}{0}t^k+\binom{k}{1}t^{k-1+\gamma}+\binom{k}{2}t^{k-2+2\gamma}+\ldots+\binom{k}{k}t^{k\gamma}.$$

Ebben a polinomban az első tag a kívánt t^k, a többi pedig mind legalább $k+\gamma-1\ge(k+1)$-edfokú. Legyen minden $n\ge k$-ra $P_n(x,y,z)$ az a polinom, amely előállítja t^n-t; ekkor

$$t^k=(t+t^\gamma)^k-\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}P_{k-i+i\gamma}(t^\alpha,t^\beta,t+t^\gamma),$$

vagyis

$$P_k(x,y,z)=z^k-\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}P_{k-i+i\gamma}(x,y,z)$$

választással

$$P_k(t^\alpha,t^\beta,t+t^\gamma)=t^k.$$

Ezzel az A) és a B) állítást is igazoltuk.

Szádeczky-Kardoss Szabolcs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján