I. megoldás. Definiáljuk a következő sorozatot:

$$a_1 = \sqrt{2}; \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}.$$

A sorozat elemei a megadott alakúak. A definíció értelmes, mert ha $0 < a_n \le \sqrt{2}$ (ez a feltétel $n = 1$-re triviális), akkor a_{n+1} értelmes és $0 < a_{n+1} < \sqrt{2}$.

Azt állítjuk, hogy az (a_n) sorozat tetszőleges pontossággal megközelíti az 1-et (vagyis $a_n \to 1$).

Legyen $b_n = a_n - 1$. A rekurzió szerint

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = \sqrt{2 - a_n} - 1 = \frac{\sqrt{2 - a_n}^2 - 1^2}{\sqrt{2 - a_n} + 1} = \frac{-b_n}{\sqrt{2 - a_n} + 1},$$

amiből felhasználva, hogy a definíció alapján $a_n \le \sqrt{2}$,

$$|b_{n+1}| = \frac{|b_n|}{\sqrt{2 - a_n} + 1} \le \frac{|b_n|}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1} < \frac{3}{5}|b_n|.$$

Mivel $|b_1| = \sqrt{2} - 1 < \frac{3}{5}$, ebből következik, hogy

$$|a_n - 1| = |b_n| < \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Ez pedig 0-hoz tart.

Vörös Zoltán (Tiszavasvári, Váci M. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Megoldásunk a félszögek trigonometrikus függvényeire vonatkozó azonosságokra épül.

Nevezzünk egy számot az egyszerűség kedvéért felírhatónak, ha felírható $\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots. \pm \sqrt{2}}}$ alakban. Bebizonyítjuk, hogy a felírható számok a $(0;2)$ intervallumban sűrűn helyezkednek el, azaz tetszőleges $0 \le a < b \le 2$ esetén létezik $a < u < b$ felírható szám.

Legyen $f(x) = 2|\cos x|$. Ez a függvény π szerint periodikus, értékkészlete a $[0;2]$ intervallum. Másrészt

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right| = 2\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{2 + 2\cos x} = \sqrt{2 \pm f(x)},$$

ahol $f(x)$ előjele az x értékétől függ.

Ebből az azonosságból következik, hogy ha valamilyen x-re $f(x)$ felírható, akkor $f\left(\frac{x}{2}\right)$ is felírható, csak felírásában eggyel több gyökjel van. Ezt k-szor megismételve kapjuk, hogy $f\left(\frac{x}{2^k}\right)$ is felírható.

A legegyszerűbb felírható szám a $\sqrt{2}$. Ezt az f függvény minden $\frac{\pi}{2}$ hosszúságú intervallumban felveszi, ugyanis tetszőleges m egész számra $f\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Legyen most $a = f(\alpha)$ és $b = f(\beta)$, ahol $0 \le \beta < \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Válasszuk k-t olyan nagynak, hogy $2^k(\alpha - \beta) > \frac{\pi}{2}$ legyen. Ekkor a $(2^k\beta, 2^k\alpha)$ intervallumban létezik egy olyan $2^k\beta < x_0 < 2^k\alpha$ szám, amelyre $f(x_0) = \sqrt{2}$. Mivel $f(x_0)$ felírható, felírható vele együtt $u = f\left(\frac{x_0}{2^k}\right)$ is. Mivel pedig $\beta < \frac{x_0}{2^k} < \alpha$, az is igaz, hogy $a < u < b$. Ezzel az állításunkat igazoltuk.

Speciálisan, minden $0 < \varepsilon < 1$-hez található olyan felírható u, amelyre $1 - \varepsilon < u < 1 + \varepsilon$, azaz $|u - 1| < \varepsilon$. A $\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots. \pm \sqrt{2}}}$ alakú számok tehát tetszőlegesen közel lehetnek az 1-hez.

Megjegyzés. A megoldás kis módosításával be lehet bizonyítani, hogy egy szám pontosan akkor felírható, ha $\left|\cos\frac{2m+1}{2^{k+1}}\pi\right|$ alakú, ahol m, k pozitív egészek.

Póczos Balázs (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján