Az 1-es szám már egyetlen 4-es segítségével is előállítható: $1=\left[\sqrt{\sqrt{4}}\right]$. A továbbiakban ezért szabályosnak tekinthetünk minden olyan előállítást, amelyben a megengedett műveleteken kívül 4-esek és 1-esek szerepelnek, összesen legfeljebb három darab.

Tekintsük a megengedett módon előállítható (általában nem egész)

$$\frac{4}{\sqrt{4}-1}<\frac{4}{\sqrt[4]{4}-1}<\frac{4}{\sqrt[8]{4}-1}<\dots \tag{1}$$

számokat. Ebben a végtelenhez tartó sorozatban minden tag legfeljebb az előtte levőnek a háromszorosa lehet. Jelöljük a $\sqrt[2k]{4}$-et A-val, ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség $\frac{4}{A-1}\le 3\cdot\frac{4}{A^2-1}$, ami $A>1$ miatt $A+1\le 3$ alakba írható, ez pedig nyilván igaz.

Legyen ezután n egy 2-nél nagyobb, előállítandó egész szám. Olyan t pozitív egészet keresünk, amelyre

$$3n^{2^t}<(n+1)^{2^t} \tag{2}$$

teljesül. A (2) fennállása esetén ugyanis az (1) sorozatnak – a bizonyított egyenlőtlenség miatt – létezik az $\left[n^{2^t},(n+1)^{2^t}\right)$ intervallumba eső eleme, és abból t-szer négyzetgyököt vonva olyan számot kapunk, amelynek n az egészrésze.

Megmutatjuk, hogy $t=n$ kielégíti (2)-t. Könnyen látható (például az n-re vonatkozó indukcióval), hogy $n<2^{n-1}$, ezért

$$\begin{aligned}(n+1)^{2^n}=n^{2^n}+2^n\cdot 2^{2^n-1}+\dots\ge n^{2^n}+2^n\cdot n^{2^n-1}\ge\\ \ge n^{2^n}+2n\cdot n^{2^n-1}=3n^{2^n}.\end{aligned}$$

Ezzel a feladatot minden 2-től különböző természetes számra megoldottuk. A 2 előállítása: $2=\sqrt{4}$.

Megjegyzések. 1. Amint az a megoldásból látható, az összeadás és szorzás művelete nem szükséges a kívánt előállításokhoz, és az egészrészképzést is minden számnál legfeljebb csak kétszer kell használni.

2. A „legfeljebb három darab 4-es” kikötés módosítható arra, hogy három adott, 1-nél nagyobb számot használhatunk, mindegyiket legfeljebb egyszer.

Izsák Ferenc (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., IV. o.t.)