A három pont (P, Q, R) nem lehet mind egy oldalon az ABC háromszögben, mert akkor ez az oldal legalább a kerület $\frac{2}{3}$ része lenne, s ez ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségnek.

Így két eset lehetséges.

1. eset: Az egyik oldalon két pont van, egy másikon pedig a harmadik. Legyen az AB oldalon a P és a Q, a BC oldalon az R pont (P és Q közül P van A-hoz közelebb) (*1. ábra*). Feltehetjük, hogy a kerület 3 egység, vagyis $a+b+c=3$. Ekkor $PQ=1$ és $QB+BR=1$. A háromszög-egyenlőtlenségből $c<1{,}5$, $a<1{,}5$. A PQR háromszög R-hez tartozó magasságát m_r-rel, az ABC háromszög C-hez tartozó magasságát m_c-vel jelölve: (BRR' és BCC' hasonlóságából)

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}}=\frac{1\cdot m_r}{c\cdot m_c}=\frac{1}{c}\cdot\frac{BR}{BC}=\frac{1}{c}\cdot\frac{BR}{a}.$$

De $BR=PQ-QB>PQ-(c-PQ)>2PQ-1{,}5=0{,}5$; így

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}}=\frac{1}{ca}\cdot BR>\frac{0{,}5}{1{,}5\cdot 1{,}5}=\frac{2}{9}.$$

Itt a $\frac{2}{9}$ nem helyettesíthető nagyobb számmal, mert ha $AB=BC$ és AC-t elég kicsinek választjuk, P-t pedig A-ba visszük, akkor

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}}=\frac{2-c}{ac},$$

ami ha $a+b+c=3$, akkor a, $c\to 1{,}5$, $b\to 0$ esetén tart $\frac{2}{9}$-hez. Ez azt jelenti, hogy ekkor a $\frac{2}{9}$ éles becslés.

2. eset: Mindhárom pont különböző oldalon van (*2. ábra*). Könnyen láthatóan

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}}=1-\left(\frac{BQ}{BC}\cdot\frac{BP}{BA}+\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AR}{AC}+\frac{CR}{CA}\cdot\frac{CQ}{CB}\right).$$

A kivonandóról (jelöljük M-mel) szeretnénk belátni, hogy legfeljebb $\frac{7}{9}$. Tegyük fel, hogy $a+b+c=3$, és jelöljük x-szel az $\frac{AP}{AB}$ arányt. x segítségével a többi arányt is kifejezzük. Ekkor

$$\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AR}{AC}=x\cdot\frac{1-xc}{b}=-\frac{c}{b}x^2+\frac{1}{b}x,\ \frac{BQ}{BC}\cdot\frac{BP}{BA}=\frac{1-(1-x)\cdot c}{a}\cdot(1-x)=-\frac{c}{a}x^2+\frac{2c-1}{a}x+\frac{1-c}{a},\ \frac{CQ}{CB}\cdot\frac{CR}{CA}=\frac{a+(1-x)c\ \cdots}{a}$$

Közös nevezőre hozva:

$$M=-\frac{3c}{ab}x^2+\frac{3c+a-b}{ab}x+\frac{ab+b-2}{ab}.$$

Ennek a másodfokú kifejezésnek maximumhelye van, arról szeretnénk belátni, hogy $\frac{7}{9}$-nél kisebb. A maximum értékét adó $-\frac{\Delta}{4A}$ (Δ a diszkrimináns) képlet felhasználásával:

$$M_{\max}=\frac{9c^2+a^2+b^2+6ac+6bc-2ab+12abc-24c}{12abc}.$$

Bizonyítandó: $M_{\max}<\frac{7}{9}$.

Beszorzás és rendezés után:

$$27c^2+3a^2+3b^2+18ac+18bc-6ab-72c+8abc<0.$$

Most minden tagból harmadfokút „gyártunk” $a+b+c=3$ és $(a+b+c)^2=9$ felhasználásával:

$$\begin{aligned}&\left(9c^3+9c^2a+9c^2b\right)+\left(a^3+a^2b+a^2c\right)+\left(b^3+b^2a+b^2c\right)+\\&+\left(6a^2c+6abc+6ac^2\right)+\left(6b^2c+6bc^2+6abc\right)+\left(-2abc-2a^2b-2ab^2\right)+\\&+\left(-8a^2c-8b^2c-8c^3-16abc-16ac^2-16bc^2\right)+8abc=\\&=a^3+b^3+c^3-ac^2-bc^2-a^2c-b^2c-a^2b-ab^2+2abc=\\&=(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)<0.\end{aligned}$$

Mivel csak ekvivalens átalakítást végeztünk,

$$M\le M_{\max}<\frac{7}{9},\qquad \text{s így}\qquad \frac{T_{PQR}}{T_{ABC}}>\frac{2}{9}.$$

Ezt kellett igazolni.

Megjegyzés. A második esetben is megközelíthető a $\frac{2}{9}$. Legyen $AB = BC$ és $AP = 2PB$. Ha $CBA\sphericalangle \to 0$, akkor

CQ$\overline{CB \to \frac{2}{3}}$, $\frac{AR}{AC} = \frac{1}{3}$, s így $\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} \to \frac{2}{9}$. *Burcsi Péter* (Pápa, Türr István Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján