Jelöljük tetszőleges a, b egész számokra $m(a,b)$-vel az

$$x_1+x_2+\ldots+x_5=a; x_1^3+x_2^3+\ldots+x_5^3=b \tag{3}$$

egyenletrendszer megoldásainak számát az 1000-nél nem nagyobb abszolút értékű egészek körében. Nyilván $m(a,b)=0$, ha $|a|>5000$ vagy $|b|>5\cdot 10^9$.

A (3) egyenletrendszer megoldásait összepárosíthatjuk az

$$x_1+x_2+\ldots+x_5=-a; x_1^3+x_2^3+\ldots+x_5^3=-b \tag{4}$$

egyenletrendszerével, ha x_i helyére mindenhol $-x_i$-t írunk, ezért $m(a,b)=m(-a,-b)$ mindig teljesül.

Csoportosítsuk (1) megoldásait aszerint, hogy $x_1+\ldots+x_5$ és $x_1^3+\ldots+x_5^3$ értéke mennyi. Ha $x_1+\ldots+x_5=a$ és $x_1^3+\ldots+x_5^3=b$, akkor $x_6+\ldots+x_{10}=-a$ és $x_6^3+\ldots+x_{10}^3=-b$, és az ilyen esetek száma $m(a,b)m(-a,-b)=m^2(a,b)$. Ha ezt minden lehetséges a, b számpárra összegezzük, megkapjuk (1) megoldásainak számát:

$$M_1=\sum_{|a|\le 5000}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9} m(a,b)m(-a,-b)=\sum_{|a|\le 5000}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9} m^2(a,b). \tag{5}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy (2) megoldásainak száma

$$M_2=\sum_{|a|\le 5000}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9} m(a,b)m(1-a,1-b)=\sum_{|a|\le 5000}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9} m(a,b)m(a-1,b-1). \tag{6}$$

Alkalmazzuk az $uv\le \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ egyenlőtlenséget (6) minden tagjára. (Ez az egyenlőtlenség minden valós számpárra teljesül és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $u=v$.)

$$M_2=\sum_{|a|\le 5000}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9} m(a,b)m(a-1,b-1)\le$$

$$\le \sum_{|a|\le 5000}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9} \frac{1}{2}(m^2(a,b)+m^2(a-1,b-1))\le \sum_{|a|\le 5001}\ \sum_{|b|\le 5\cdot 10^9+1} m^2(a,b)=M_1.$$

Tehát $M_2\le M_1$. Egyenlőség csak akkor állhatna, ha minden a, b számpárra $m(a,b)=m(a-1,b-1)$ lenne. Ez azonban nem igaz, mert például $m(5001,5\cdot 10^9+1)=0$ és $m(5000,5\cdot 10^9)=1$. (Az egyetlen eset, amikor $x_1+\ldots+x_5=5000$ és $x_1^3+\ldots+x_5^3=5\cdot 10^9$, ha $x_1=\ldots=x_5=1000$.)

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Többben, érdemleges indoklás nélkül, azt állították, hogy (1)-nek csak olyan megoldásai vannak, amelyekben az x_i-k páronként ellentettek, illetve (2) megoldásaiban az x_i-k közül az egyik 0, egy másik 1, a többi pedig páronként ellentettje egymásnak. (Ezeket nevezhetjük „triviális” megoldásoknak.)

Ez a sejtés nem igaz. Például (1) egy nem triviális megoldása $x_1=-16$, $x_2=13$, $x_3=12$, $x_4=10$, $x_5=-8$, $x_6=-7$, $x_7=5$, $x_8=-4$, $x_9=-3$, $x_{10}=-2$; a (2) egyenletrendszer egy nem triviális megoldása $x_1=-12$, $x_2=11$, $x_3=10$, $x_4=-9$, $x_5=8$, $x_6=-7$, $x_7=-5$, $x_8=4$, $x_9=3$, $x_{10}=-2$.

2. A megoldás elmondható akkor is, ha (2)-ben a két konstanst másra cseréljük. Ez azt jelenti, hogy az

$$x_1+x_2+\ldots+x_{10}=c; x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{10}^3=d$$

egyenletrendszernek $c=d=0$ esetén van a legtöbb megoldása.

Ez az eredmény lehetőséget ad M_1 alsó becslésére is.