Ha $A=0$, akkor a sorozat definíciója értelmetlen. Ha $A>0$, akkor a sorozat minden eleme pozitív (x_1 pozitív, és a rekurzió alapján x_n pozitivitásából következik x_{n+1} pozitivitása is). Ha $A<0$, akkor a sorozat minden eleme negatív. Ezekben az esetekben tehát a rekurzió értelmes.

Az esetszétválasztások elkerülése érdekében legyen $y_n=\dfrac{x_n}{\sqrt[3]{A}}$. A kérdés az, hogy az (y_n) sorozat tetszőleges pontossággal megközelíti-e az 1-et (azaz $y_n\to 1$).

Azt állítjuk, hogy az (y_n) sorozatra a következő rekurzió teljesül:

$$y_1=\mid A\mid^{\frac{2}{3}},\quad y_{n+1}=\frac{y_n+\frac{1}{y_n^2}}{2}. \tag{2}$$

Az első állítás egyszerűen következik y_1 definíciójából. A másodikhoz írjunk (1)-ben x_n helyére $\sqrt[3]{A}y_n$-et, y_{n+1} helyére $\sqrt[3]{A}x_{n+1}$-et:

$$\sqrt[3]{A}y_{n+1}=\frac{\sqrt[3]{A}y_n+\frac{A}{\left(\sqrt[3]{A}y_n\right)^2}}{2}.$$

Ezt $\sqrt[3]{A}$-val osztva éppen (2)-t kapjuk. (Észrevehető, hogy a feladatot tulajdonképpen az $A=1$ esetre vezettük vissza.)

Mielőtt a konvergencia bizonyításához hozzákezdenénk, először az (y_n) sorozat elemeire bizonyítunk két becslést.

I. Az (y_n) sorozat minden eleme pozitív. Ez következik az első elem pozitív voltából.

II. Ha $n\ge 2$, akkor $y_n>\dfrac{9}{10}$. A rekurzió, valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján ugyanis

$$y_n=\frac{y_{n-1}+\frac{1}{y_{n-1}^2}}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{1}{y_{n-1}^2}}{3}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{y_{n-1}}{2}\cdot\frac{y_{n-1}}{2}\cdot\frac{1}{y_{n-1}^2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}>\frac{9}{10}.$$

Vizsgáljuk meg, mi az összefüggés y_n és y_{n+1} 1-től való távolsága között. A rekurzió alapján

$$|y_{n+1}-1|=\left|\frac{y_n+\frac{1}{y_n^2}}{2}-1\right|=\left|\frac{y_n^3-2y_n^2+1}{2y_n^2}\right|=\left|\frac{y_n^2-y_n-1}{2y_n^2}\right|\cdot|y_n-1|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_n^2}\right|\cdot|y_n-1|=\frac{1}{2}\left|\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{y_n}+\frac{1}{2}\right)^2\right|\cdot|y_n-1|.$$

Ha $n\ge 2$, akkor $y_n>\dfrac{9}{10}$, ezért $0<\dfrac{1}{y_n}<\dfrac{10}{9}$ és

$$\frac{5}{4}\ge\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{y_n}+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{5}{4}-\left(\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\right)^2>-\frac{3}{2}.$$

Mindezek alapján pedig

$$\left|\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{y_n}+\frac{1}{2}\right)^2\right|<\frac{3}{2},$$
$$|y_{n+1}-1|<\frac{3}{4}|y_n-1|.$$

Ebből az eredményből teljes indukcióval azonnal bebizonyítható, hogy $n>2$ esetén

$$|y_n-1|<|y_2-1|\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.$$

A jobb oldalon álló mértani sorozat 0-hoz tart, mert a hányadosa 1-nél kisebb abszolút értékű, következésképpen y_n-1 is 0-hoz tart, y_n 1-hez, végül x_n $\sqrt[3]{A}$-hoz tart.

Az (x_n) sorozat tehát $\sqrt[3]{A}$-hoz tart minden olyan esetben, amikor $A\ne 0$.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)

Megjegyzések. 1. Ha y már „közel" van az 1-hez, akkor a hiba minden lépésnél körülbelül a felére csökken, mert $\left|1-\dfrac{1}{y_n}-\dfrac{1}{y_n^2}\right|$ értéke is körülbelül 1. Ez a „sebesség" még mindig sokkal kisebb, mint a négyzetgyökvonáshoz használt rekurzió sebessége, ahol (kis hiba esetén) a hiba minden lépésben körülbelül az előző hiba négyzetének (!) felére csökken. Ez azt is jelenti, hogy a sorozat következő tagjának legalább kétszer annyi helyes jegye van.

2. Ha k-adik gyököt ($k\ge 4$) akarnánk vonni az

$$x_{n+1}=\frac{x_n+\frac{A}{x_n^{k-1}}}{2}$$

rekurzióval, érdekes eredményre jutnánk. Ez a sorozat ugyanis $k = 4$-re még konvergens (bár a konvergencia nagyon lassú), $k > 4$ esetén azonban már mindig divergens, kivéve azt az esetet, amikor $x_1 = \sqrt[k]{A}$.

3. Tegyük fel, hogy $x = \sqrt[3]{A} + \varepsilon$ és ε „kicsi” abszolút értékű. Ekkor

$$\frac{A}{x^2} = \frac{A}{\left(\sqrt[3]{A} + \varepsilon\right)^2} = \frac{A\left(\sqrt[3]{A} - \varepsilon\right)^2}{\left(\sqrt[3]{A}^2 - \varepsilon^2\right)^2} \approx \frac{A\left(\sqrt[3]{A}^2 - 2\varepsilon\sqrt[3]{A}\right)}{\sqrt[3]{A}^4} = \sqrt[3]{A} - 2\varepsilon.$$

(A $\approx$ jel azt jelenti, hogy a két mennyiség különbsége sokkal kisebb, mint ε.) A kapott közelítéshez $2x = 2\sqrt[3]{A} + 2\varepsilon$-t hozzáadva, majd ebből $\sqrt[3]{A}$-t kifejezve:

$$\sqrt[3]{A} \approx \frac{2x + \frac{A}{x^2}}{3}.$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy inkább érdemes az

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + \frac{A}{x_n^2}}{3}$$

rekurziót használni.

Be lehet bizonyítani, hogy az így felírt sorozat $\sqrt[3]{A}$-hoz tart, és a helyes jegyek száma minden iterációnál megduplázódik.

A két sorozat konvergencia-sebessége közötti különbség szemléltetésére álljanak itt azok az értékek, amelyeket $A = 8$ köbgyökének becslésére adnak:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n^2}}{2} x_{n+1} = \frac{2x_n + \frac{A}{x_n^2}}{3} n = 18.0000000008.000000000 n = 24.0625000005.375000000 n = 32.2736168643.675635479 n = 4$$

4. Általában k-adik gyökvonásra használható az

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}}{k}$$

rekurzió.

Ennek a rekurziónak megvan az a jó tulajdonsága, hogy a sorozat elemei a második elemtől kezdve nagyobbak $\sqrt[k]{A}$-nál, monoton fogynak, a helyes jegyek száma minden lépésben körülbelül megduplázódik.