I. megoldás. Ha $n=0$, akkor ki kell kötnünk, hogy a és b egyike sem lehet 0, mert a 0^0 hatványt nem értelmezzük. A $2a+3b=12$ egyenletet 6-tal osztva kapjuk, hogy

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2.$$

Legyen $\frac{a}{3}=1+x$, ahol x megfelelő valós szám; ekkor $\frac{b}{2}=2-\frac{a}{3}=1-x$, az igazolandó állítás pedig

$$(1+x)^n+(1-x)^n\ge 2.$$

Fejtsük ki a bal oldal tagjait a binomiális tétel szerint:

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n}x^n;$$

$$(1-x)^n=1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\binom{n}{3}x^3+-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n.$$

Ezek összegében csak a páros kitevőjű tagok maradnak meg, azok is pozitív előjellel:

$$(1+x)^n+(1-x)^n=2+2\binom{n}{2}x^2+2\binom{n}{4}x^4+\ldots+2\binom{n}{2[n/2]}x^{2[n/2]}. \tag{2}$$

Ha $n<2$, akkor ennek az összegnek csak egy tagja van, a 2. Ilyenkor tehát (2)-ben egyenlőség áll. Ha $n\ge 2$, akkor legalább még egy tagja van az összegnek. Mivel ezek a tagok mind nemnegatívak, az összeg legalább 2. Egyenlőség akkor van, ha $x=0$, azaz $a=3$ és $b=2$.

II. megoldás. Ha $n=0$, akkor az állítás triviális, feltéve, hogy $a\ne 0$ és $b\ne 0$. A továbbiakban feltesszük, hogy $n\ge 1$.

Legyen $x=\frac{a}{3}$ és $y=\frac{b}{2}$. A feltételt 6-tal osztva kapjuk, hogy $x+y=2$, a bizonyítandó állítás pedig: $x^n+y^n\ge 2$. Mivel x és y szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy $x\le y$. Azt állítjuk, hogy minden k természetes szám esetén $x^k\le y^k$. Ez azért igaz, mert $y\ge x=2-y>-y$ miatt $|x|\le y$.

Ebből következik, hogy

$$1+y+y^2+\ldots+y^{n-1}\ge 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}.$$

Az $x+y=2$ feltétel miatt $y-1=1-x$ és $y\ge x$ miatt $y-1$ nemnegatív. Ezért a fenti egyenlőtlenség igaz marad, ha a bal oldalt $(y-1)$-gyel, a jobb oldalt $(1-x)$-szel szorozzuk:

$$(y-1)(1+y+y^2+\ldots+y^{n-1})\ge(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}).$$

A beszorzásokat elvégezve $y^n-1\ge 1-x^n$ adódik, ahonnan $x^n+y^n\ge 2$. Ezt kellett bizonyítani.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.)

Megjegyzés. Többen próbálták alkalmazni a számtani és az n-edik hatványközép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{a}{3}$ és $\frac{b}{2}$ számokra:

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}},\qquad \text{ha}\qquad x,y\ge 0.$$

Azt az esetet azonban, amikor a vagy b negatív, többnyire nem vizsgálták meg. Az ilyen dolgozatok 2 pontot kaptak.