Ha n természetes szám, akkor $P(n) \geq 0$, és így $n + P(n) \geq n$. Az $\{n_i\}$ sorozat tehát monoton növő, vagyis az állítás pontosan akkor teljesül, ha a sorozat valahonnan kezdve konstans. Ez viszont akkor lép föl, ha a sorozat valamely elemére, mondjuk n_h-ra, $P(n_h) = 0$, ami azt jelenti, hogy n_h jegyei között van nulla. Azt kell tehát igazolni, hogy a sorozat elemei között előbb-utóbb előfordul egy ilyen tulajdonságú.

Tegyük föl indirekt módon, hogy nincs ilyen, így a sorozat nem lesz konstans, azaz tetszőlegesen nagy értéket felvesz. Vizsgáljuk azokat az n_j elemeket, amelyekre n_{j+1} több jegyből áll, mint n_j:

$$n_j < 10^k \leq n_{j+1}.$$

Ekkor n_j legfeljebb k jegyből áll, ezért $P(n_j) \leq 9^k$, azaz $n_{j+1} = n_j + P(n_j) \leq n_j + 9^k < 10^k + 9^k$. Ha belátjuk, hogy valamely j esetén

$$10^k \leq n_{j+1} < 10^k + 10^{k-1},$$

akkor készen vagyunk, hiszen ez azt jelenti, hogy n_{j+1} második jegye nulla, ami ellentmondás.

Mivel $10^k \leq n_{j+1}$ már a j választása miatt fennáll, továbbá $n_{j+1} < 10^k + 9^k$, azért elegendő azt megmutatni, hogy

$$9^k < 10^{k-1},$$

átrendezve

$$9 < \left(\frac{10}{9}\right)^{k-1}$$

fennáll. Belátjuk, hogy ez $k \geq 25$ esetén teljesül. (Valójában már $k \geq 22$ esetén is, de ezt nehézkesebb igazolni, s a feladat szempontjából lényegtelen.) Ekkor készen leszünk, hiszen indirekt feltevésünk szerint a sorozat tetszőlegesen nagy értéket felvesz, vagyis található olyan j, amelyhez 24-nél nagyobb k tartozik.

$$\left(\frac{10}{9}\right)^4 = \frac{10\,000}{6561} > \frac{3}{2}, \qquad \text{mert} \qquad 20\,000 > 3 \cdot 6561 = 19\,683;$$

valamint

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{729}{64} > 9, \qquad \text{vagyis} \qquad 729 > 9 \cdot 64 = 576.$$

Ezek szerint

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{24} = \left(\left(\frac{10}{9}\right)^4\right)^6 > \left(\frac{3}{2}\right)^6 > 9.$$

Minthogy $\frac{10}{9} > 1$, ezért ha $k \geq 25$, akkor $\left(\frac{10}{9}\right)^{k-1} \geq \left(\frac{10}{9}\right)^{24} > 9$. Ezzel az állítást beláttuk.

Nyul Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján