I. megoldás. A két szorzatot csoportosítsuk a következő módon:

$$(200 \cdot 199) \cdot 198!, \qquad \text{illetve} \qquad 100^3 \cdot 100^{197}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt[197]{198!} = \sqrt[197]{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 198} < \frac{2+3+\dots+198}{197} = \frac{200 \cdot 197}{197 \cdot 2} = 100,$$

azaz $198! < 100^{197}$. A zárójelben levő szorzat pedig

$$200 \cdot 199 = 39\ 800 < 1\ 000\ 000 = 100^3,$$

vagyis a két egyenlőtlenség összeszorozva (minden tényező pozitív)

$$200! < 100^{200}$$

adódik.

Kőműves Balázs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Általánosabban, $(2n)!$-t és n^{2n}-t hasonlítjuk össze. Mindkét kifejezés $2n$ tényezős szorzat. Az $n = 1$, 2 esetekben látható, hogy $(2n)! > n^{2n}$. Legyen $n \geq 3$. Vizsgáljuk meg az $\frac{n^{2n}}{(2n)!}$ törtet. Bontsuk föl $2n-1$ tört szorzatára:

$$\left(\frac{n}{1}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{2n-2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n}\right).$$

Az első $n-1$ tört nagyobb 1-nél, az n-edik éppen 1, a többi pedig kisebb 1-nél. Állítsuk ezeket párba:

$$\frac{n}{1} \text{ és } \left(\frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1}\right), \quad \frac{n}{2} \text{ és } \frac{n}{2n-2}, \quad \dots \quad \frac{n}{n-1} \text{ és } \frac{n}{2n-(n-1)},$$

végül $\frac{n}{n}$ pár nélkül. Felírva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget k-ra és $(2n-k)$-ra $(2 \leq k \leq n-1)$:

$$k(2n-k) < \left(\frac{k+2n-k}{2}\right)^2 = n^2,$$

azaz $\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{2n-k} > 1$. Tehát az elsőt kivéve minden párban a tényezők szorzata 1-nél nagyobb. Vizsgáljuk külön a kimaradó első párt: nézzük meg, hogy milyen n-re lesz tényezőinek szorzata 1-nél nagyobb. Ekvivalens átalakításokat végezve (felhasználva persze, hogy $n \geq 3$)

$$n^3 \geq 2n(2n-1)n^2 \geq 4n - 2n^2 - 4n + 4 \geq 2(n-2)^2 \geq 2n - 2 \geq \sqrt{2}n \geq \sqrt{2} + 2 \approx 3{,}41.$$

Ha tehát $n \geq 4$, akkor minden pár szorzata 1-nél nagyobb, és így $n^{2n} > (2n)!$. Az $n = 3$ esetben pedig $3^6 = 729 > 720 = 6!$, azaz minden $n \geq 3$ egészre

$$n^{2n} > (2n)!\ .$$

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján