Jelöljük a és b legnagyobb közös osztóját A-val, és legyen $a = a_1 \cdot A$, $b = b_1 \cdot A$. Ekkor a legkisebb közös többszörös $A \cdot a_1 \cdot b_1$, amiről meggyőződhetünk a számok prímtényezős alakját vizsgálva: ha $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$ ($\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$), akkor

$$A = (a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)}, \qquad [a,b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r)},$$
$$a_1 = p_1^{\alpha_1 - \min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r - \min(\alpha_r,\beta_r)}, \qquad b_1 = p_1^{\beta_1 - \min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r - \min(\alpha_r,\beta_r)},$$

azaz

$$A \cdot a_1 \cdot b_1 = p_1^{\alpha_1+\beta_1-\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r+\beta_r-\min(\alpha_r,\beta_r)} = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r)},$$

hiszen tetszőleges α, β esetén $\alpha + \beta - \min(\alpha,\beta) = \max(\alpha,\beta)$.

Az előbbieket az egyenletbe helyettesítve és azt átalakítva:

$$A \cdot a_1 \cdot b_1 + A + A \cdot a_1 + A \cdot b_1 = Aa_1 \cdot Ab_1, A \cdot (a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1) = A \cdot (Aa_1b_1), A(a_1+1)(b_1+1) = A(Aa_1b_1).$$

Vizsgáljuk meg először az $A = 0$ esetet. Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor $A \neq 0$, így a és b közül valamelyik biztosan nulla. Definíció szerint $(a,0) = a$, ha $a \neq 0$, vagyis egyedül az $a = b = 0$ eset marad. A $(0,0)$ számot nem szokás értelmezni; ha mégis megtesszük, akkor $(0,0) = 0$ esetén az $a = b = 0$ számpár megoldás, míg $(0,0) \neq 0$ esetén nem. Más kérdés, hogy a 0-t nem mindig tekintik természetes számnak; mindenesetre sem az $a = b = 0$ hiánya, sem a megléte nem befolyásolja a megoldás további (és egyben lényegi) részét (sem pedig a pontozást).

Feltehetjük tehát, hogy $A \neq 0$, és ekkor egyszerűsíthetünk vele:

$$(a_1+1)(b_1+1) = Aa_1b_1. \tag{1}$$

Látható, hogy az $a_1 = 0$, illetve $b_1 = 0$ esetek nem adnak megoldást, így megengedett a következő átrendezés:

$$A = \frac{a_1+1}{a_1} \cdot \frac{b_1+1}{b_1}.$$

Mivel $1 \leq a_1$ és $1 \leq b_1$, azért

$$1 < \frac{a_1+1}{a_1} \leq 2, \qquad 1 < \frac{b_1+1}{b_1} \leq 2;$$

ennek alapján csak $A = 2$; 3; 4 lehetséges.

1. eset: $A = 2$. Ekkor (1)-et átrendezve

$$a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1 = 2a_1b_1,$$

majd 2-t mindkét oldalhoz hozzáadva,

$$2 = a_1b_1 - a_1 - b_1 + 1 = (a_1-1)(b_1-1).$$

Ez csak úgy lehet, ha $a_1 - 1 = 1$ és $b_1 - 1 = 2$, vagy fordítva. Az előbbi esetén $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, azaz $a = 4$, $b = 6$; míg a másiknál $a = 6$, $b = 4$.

2. eset: $A = 3$. Most (1)-ből

$$3a_1b_1 = a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1,$$
$$2a_1b_1 - a_1 - b_1 - 1 = 0,$$
$$4a_1b_1 - 2a_1 - 2b_1 - 2 = 0,$$
$$(2a_1-1)(2b_1-1) = 3.$$

Ekkor szükségképpen $2a_1 - 1 = 3$ és $2b_1 - 1 = 1$, vagy fordítva, amiből $a = 6$, $b = 3$, illetve $a = 3$, $b = 6$ adódik.

3. eset: $A = 4$. Ekkor

$$4a_1b_1 = a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1,$$
$$3a_1b_1 - a_1 - b_1 - 1 = 0,$$
$$9a_1b_1 - 3a_1 - 3b_1 - 3 = 0,$$
$$(3a_1-1)(3b_1-1) = 4.$$

Mivel $3a_1 - 1 = 4$ és $3b_1 - 1 = 1$ nem lehetséges, így $3a_1 - 1 = 3b_1 - 1 = 2$, amiből $a = b = 4$.

Öt számpárt találtunk, s könnyen ellenőrizhető, hogy ezek mindegyike valóban jó is; a megoldások tehát:

$$(3;6), \qquad (4;6), \qquad (4;4), \qquad (6;4), \qquad (6;3).$$

Reviczky Ágnes (München, Gymansium Der Armen Schulschwestern, II. o.t.) dolgozata alapján