Jelöljük a paralelogramma csúcsait A, B, C, D-vel, szögeit 2α-val és 2β-val, oldalainak hosszát a-val és b-vel, a szögfelezők által meghatározott négyszög csúcsait pedig E, F, G, H-val. Feltehetjük, hogy $a > b$ (ha két szomszédos oldal egyenlő lenne, akkor a szögfelezők nem határoznak meg négyszöget, hanem egy pontban metszenék egymást).

Tudjuk, hogy $2\alpha + 2\beta = 180°$, mert a paralelogramma szomszédos szögeinek összege $180°$. Az AED háromszögben

$$AED\sphericalangle = 180° - (EAD\sphericalangle + EDA\sphericalangle) = 180° - (\alpha + \beta) = 90°.$$

Ezért $HEF\sphericalangle = AED\sphericalangle = 90°$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy az $EFGH$ négyszög többi szöge is derékszög, tehát a négyszög téglalap. E a D-ből és az A-ból induló szögfelezők metszéspontja, ezért egyenlő távolságra van a CD a DA és az AB egyenesektől. Tehát E rajta van a paralelogramma AB-vel és CD-vel párhuzamos középvonalán. Ugyanígy belátható, hogy G is rajta van ezen a középvonalon, tehát $EG \parallel CD$; továbbá $FH \parallel AD$.

Legyen M az A-ból induló szögfelező és CD metszéspontja. Az AMD háromszög egyenlő szárú, mert a D-ből induló szögfelezője merőleges AM-re. Ezért $DM = b$, így $CM = CD - MD = a - b$. Mivel $EM \parallel GC$ és $EG \parallel CM$, azért az $EGCM$ négyszög paralelogramma, tehát $EG = CM = a - b$. Tudjuk, hogy a téglalap átlói egyenlőek, így $FH = EG = a - b$.

A téglalap területét kiszámíthatjuk átlóinak hosszából és azok szögéből:

$$T_{EFGH} = \frac{1}{2} EG \cdot FH \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2}(a-b)^2 \sin 2\alpha.$$

A paralelogramma területe az ismert képlet alapján:

$$T_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 2\alpha = a \cdot b \cdot \sin 2\alpha.$$

Feltételünk szerint $3T_{EFGH} = T_{ABCD}$, vagyis

$$a \cdot b \cdot \sin 2\alpha = 3 \cdot \frac{1}{2}(a-b)^2 \cdot \sin 2\alpha.$$

Rendezve:

$$2ab = 3a^2 - 6ab + 3b^2,$$

azaz:

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\frac{a}{b} + 3 = 0.$$

Ebből a megoldóképlet alapján kapjuk, hogy:

$$\frac{a}{b} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \approx 2{,}215.$$

Mivel $a > b$, csak a $\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ jó megoldás (a $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ ennek a reciproka).

Tehát a paralelogramma hosszabbik oldala $\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$-szorosa a rövidebbik oldalnak.

Havas Dávid (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján