Legyen a keresett szám $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$. Ha az i-edik és j-edik jegyek ($i > j$) felcserélésével kapott számot kivonjuk az eredetiből, akkor a különbség

$$(1) \qquad 10^ia_i + 10^ja_j - 10^ja_i - 10^ia_j = (10^i - 10^j)(a_i - a_j) = 2^j \cdot 5^j \cdot 9 \cdot (\underbrace{11\ldots1}_{i-j \text{ darab}})(a_i - a_j)$$

Az $i - j$ darab egyesből álló szám a következő lehet:

$$(2) \qquad i = j + 11i = j + 211i = j + 3111 = 3 \cdot 37i = j + 41111 = 11 \cdot 101i = j + 511111 = 41 \cdot 271$$

Vizsgáljuk meg, hogyan jöhetnek létre a kívánt tulajdonságú különbségek! Tekintsük először a $2168 = 2^3 \cdot 271$-gyel oszthatót. Az (1) felbontást használjuk. Mivel valódi különbségről van szó és $|a_i - a_j| < 10$, azért csak $i = j + 5$, azaz $i = 5$, $j = 0$ esetén lehet a különbség osztható 271-gyel. Ekkor viszont $8 \mid a_i - a_j$, ami a következő esetekben lehetséges ($a_0 \neq a_5$, mert nemnulla különbségeket tekintünk, és $a_5 \neq 0$, mert valódi hatjegyű számot keresünk):

$$\overline{8a_4a_3a_2a_10}, \qquad \overline{9a_4a_3a_2a_11}, \qquad \overline{1a_4a_3a_2a_19}.$$

Nézzük most a $2525 = 5^2 \cdot 101$-et: a 101-gyel való oszthatóság csak az 1111-ből származhat, tehát (2) alapján $i = j + 4$. Az $i = 4$, $j = 0$ esetben $25 \mid a_i - a_j$ kellene fennálljon, ami lehetetlen, ezért $i = 5$, $j = 1$ és $5 \mid a_1 - a_5$. A lehetőségek:

$$\overline{8a_4a_3a_230}, \qquad \overline{9a_4a_3a_241}, \qquad \overline{1a_4a_3a_269}.$$

A $6875 = 5^4 \cdot 11$ esetben csak $j \geq 3$ lehet, hiszen $a_i - a_j$ 5-nek legfeljebb első hatványával lehet osztható. A 11-gyel való oszthatóság miatt $i - j = 2$ vagy 4, ami a $j \geq 3$ feltétellel együtt az $i = 5$, $j = 3$ esethez vezet. Ekkor még $5 \mid a_3 - a_5$ is szükséges, azaz a számok:

$$\overline{8a_43a_230}, \qquad \overline{9a_44a_241}, \qquad \overline{1a_46a_269}.$$

A $4375 = 7 \cdot 5^4$-t vizsgálva az előző esethez hasonlóan $j \geq 3$ adódik. Mivel 7-tel csak $a_i - a_j$ lehet osztható, azért a $j = 3$ kizárható: ekkor ugyanis $35 \mid a_i - a_j$-nek kellene fennállnia.

Marad a $j = 4$, $i = 5$ eset, valamint $7 \mid a_4 - a_5$:

$$\overline{813a_230}, \qquad \overline{924a_241}, \qquad \overline{186a_269}.$$

Tudjuk még azt is, hogy a számnak van 7-es jegye is, ez mindhárom esetben csak az a_2 lehet. A 9-cel oszthatóságot a három számból kizárólag a 924741 teljesíti, vagyis ez az egyedüli lehetséges szám. Erről viszont azt is láttuk már, hogy valóban megfelelő.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján