

A feladatnak nyilván csak akkor van értelme, ha sem A , sem B nem esik a kör belsejébe. Ha A és B egyike sincs rajta a körvonalon, akkor az állítás igaz, egyébként pedig nem. Ha ugyanis A a körvonalon, B pedig a körön kívül van, akkor $a = 0$, $b > AB$, tehát $a + b > AB$, viszont az AB szakasznak van közös pontja k -val, így ebben az esetben az állítás nem igaz (1. ábra).

Ha A is és B is a körön kívül helyezkedik el, akkor a következő három esetet kell megvizsgálnunk:

- (i) AB k -n kívül helyezkedik el,
- (ii) AB egy E pontban érinti k -t,
- (iii) AB metszi k -t.

A feladat állítása az, hogy az (i) esetben $a + b > AB$, míg a másik két esetben $a + b \leq AB$. Mindhárom esetben igaz, hogy az A -ból, illetve B -ből k -hoz húzható két-két érintőszakasz egyenlő hosszú, ezért mindig elegendő azt az érintőszakaszt vizsgálnunk, amelyik számunkra „kedvezőbb” elhelyezkedésű.

Az (i) esetben feltehetjük, hogy a két érintőegyenes közül az egyik elválasztja AB -t és k -t (tehát a kör, illetve a szakasz az érintőegyenes két különböző oldalára esik), a másik pedig nem. Ábránkon az A -ból húzott érintő az elválasztó. Ekkor a két érintőegyenes két metszéspontja a B -ből húzott érintőszakasz belső pontja lesz, de az A -ból húzottnak nem. A pontok a 2. ábrán látható módon fognak elhelyezkedni. Az ábra jelöléseit használva:

$$a + b = AE_A + BE_B = AE_A + CE_B + CB = AE_A + CE_A + CB = AC + CB.$$

Viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt $AC + CB > AB$, tehát ebben az esetben igaz a feladat állítása.

A (ii) esetben (3. ábra) $a + b = AE + EB = AB$, vagyis ekkor nyilván igaz az állítás.

A (iii) esetben azokat az érintőket rajzoljuk meg, amelyek érintési pontjait AB elválasztja a k kör O középpontjától (4. ábra). Legyen az $E_A O$, illetve az $E_B O$ sugárnak az AB -vel való metszéspontja M_A , illetve M_B . Ekkor az A , M_A , M_B , B pontok ebben a sorrendben helyezkednek el – M_A és M_B esetleg egybeesik, ha O rajta van AB -n –, ezért $a + b < AM_A + M_B B \leq AB$.

Ezzel beláttuk, hogy a feladat állítása pontosan akkor igaz, ha A is és B is a körön kívül helyezkedik el.

Nyul Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján



