

Megmutatjuk, hogy $\varphi(n)$ a páratlan helyeken $\varphi(2^{33}) = 2^{32}$ -t nem veszi fel. Legyen ugyanis

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

ahol p_1, \dots, p_k páratlan prímekek. Ekkor

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot \dots \cdot (p_k - 1).$$

Ha valamely i -re $\alpha_i > 1$, akkor $\varphi(n)$ osztható p_i -vel, így $\varphi(n)$ nem lehet 2-hatvány. Tehát ha $\varphi(n)$ 2-hatvány, akkor minden i -re $\alpha_i = 1$, azaz

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot \dots \cdot (p_k - 1).$$

Ez viszont csak akkor lehet 2-hatvány, ha $p_1 - 1, \dots, p_k - 1$ mind 2-hatvány. Felhasználjuk azt az ismert tételt (ld. pl. Szalay Mihály: Számelmélet 65. old.), hogy $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$, nem prímszám. Ekkor nyilván $\varphi(2^{2^5} + 1) \neq 2^{2^5}$. Másfelől, ha $2^l + 1$ prím valamely l egész számra, akkor $l = 2^m$ alakú, ugyanis ha l -nek lenne egy páratlan p prímosztója, akkor $2^l + 1$ osztható lenne $2^{l/p} + 1$ -gyel, így nem lenne prím.

Tehát ha $\varphi(n) = 2^{2^5} = (p_1 - 1) \cdot \dots \cdot (p_k - 1)$ valamely p_1, \dots, p_k számokra, akkor $p_i - 1 = 2^{2^{i_i}} \leq 2^{2^4}$ alakú. Így $\varphi(n) = 2^{32}$ azt jelentené, hogy $2^{32} = 2^{2^{i_1}} \cdot \dots \cdot 2^{2^{i_k}}$. Azonban

$$2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \cdot 2^{2^4} = 2^{31} < 2^{32},$$

így a fentiek alapján $\varphi(n)$ semmilyen páratlan n -re sem lehet 2^{32} .