Az $f(n)=n$ függvény nyilván kielégíti a feladat feltételét. Bebizonyítjuk, hogy ez az egyetlen ilyen.

Az $f(n^2+m^2)=f^2(n)+f^2(m)$ függvényegyenletbe $n=m=0$-t helyettesítve $f(0)=2f^2(0)$-t kapunk, aminek az egyetlen egész megoldása az $f(0)=0$. Ezek után $n=0$, $m=1$ helyettesítéssel $f(1)=f^2(1)$ adódik, így az $f(1)>0$ feltételt felhasználva csak $f(1)=1$ lehet. Most rendre behelyettesítve az $(1;1)$, $(0;2)$, $(1;2)$, $(0;5)$, $(3;4)$, $(1;3)$, $(0;10)$, $(2;2)$, $(6;8)$ számpárokat és megkeresve az egyes függvényegyenletek nemnegatív egész megoldását, $f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(25)=25$, $f(3)=3$, $f(10)=10$, $f(100)=100$, $f(8)=8$, végül $f(6)=6$-ot kapunk. Tehát $0\le n\le 6$ esetén $f(n)=n$ valóban teljesül.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az n-nél kisebb egész számokra már bebizonyítottuk az állítást. Nyilván elég az $n>6$ esettel foglalkozni. Két lehetőség van aszerint, hogy az n páros vagy páratlan. Ha páros, akkor $n=2k$ alakba írható, ahol k pozitív egész. A $(2k)^2+(k-5)^2=(k+3)^2+(2k-4)^2$ azonosság alapján

$$f^2(2k)+f^2(|k-5|)=f\left((2k)^2+(k-5)^2\right)==f\left((k+3)^2+(2k-4)^2\right)=f^2(k+3)+f^2(|2k-4|),$$

így

$$f^2(n)=f^2(2k)=f^2(k+3)+f^2(|2k-4|)-f^2(|k-5|).$$

Mivel $n>6$ és páros, azért $n\ge 8$, azaz $k\ge 4$. Ekkor $k+3$, $|2k-4|$, $|k-5|$ kisebb $2k$-nál, így az indukciós feltevés alapján

$$f^2(n)=(k+3)^2+(2k-4)^2-(k-5)^2=(2k)^2=n^2,$$

tehát $f(n)=n$.

Hasonló módon, ha n páratlan, akkor $n=2k+1$. Itt a

$$(2k+1)^2+(k-2)^2=(k+2)^2+(2k-1)^2$$

azonosságban $|k-2|$, $|k+2|$, $|2k-1|$ kisebb $2k+1$-nél, ezért

$$\begin{aligned}f^2(n)=f^2(2k+1)=f^2(|k+2|)+f^2(|2k-1|)-f^2(|k-2|)=\\=(k+2)^2+(2k-1)^2-(k-2)^2=(2k+1)^2=n^2,\end{aligned}$$

így $f(n)=n$.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.