I. megoldás. Jelöljük – az egyszerűség kedvéért – az a_i-k szorzatát p-vel.

Az (1) bal oldalán álló tényezőket a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével becsüljük alulról a következő módon:

$$\frac{1}{a_i^2}-1=\frac{1-a_i^2}{a_i^2}=\frac{(1+a_i)(1-a_i)}{a_i^2}==\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n+a_i)(a_1+\dots+a_{i-1}+a_{i+1}+\dots+a_n)}{a_i^2}\geq\geq\frac{(n+1)\cdot\sqrt[n+1]{p\cdot a_i}\cdot(n-}{a_i^2}$$

Ha ezt minden i-re elvégezzük, és a kapott becsléseket összeszorozzuk, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geq\geq\frac{(n+1)\sqrt[n+1]{p\cdot a_1}\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{p}{a_1}}}{a_1^2}\cdot\dots\cdot\frac{(n+1)\sqrt[n+1]{p\cdot a_n}\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{p}{a_n}}}{a_n^2}==\frac{(n+1)^n\sqrt[n+1]{p^n\cdot a_1\cdot}}{a_1^2}$$

Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás hamis. Legyen $(a_1,\dots,a_n)$ egy olyan szám n-es, amelyre

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)<(n^2-1)^n, \tag{2}$$

ugyanakkor az a_i-k között maximális számú $\frac{1}{n}$ szerepel. Nyilván nem lehet mindegyikük $\frac{1}{n}$, mert akkor egyenlőség állna fenn. (Ebből az is következik, hogy $n\geq 2$.)

Az a_i-k átlaga $\frac{1}{n}$, ezért van köztük $\frac{1}{n}$-nél nagyobb és kisebb is. Mivel (2) szimmetrikus az a_i-kre, feltehetjük, hogy $a_1>\frac{1}{n}$ és $a_2<\frac{1}{n}$.

Tekintsük most a $b_1=a_1+a_2-\frac{1}{n}$, $b_2=\frac{1}{n}$, $b_3=a_3$, $\dots$, $b_n=a_n$ szám n-est, vagyis változtassuk meg a_1-et és a_2-t úgy, hogy egyik helyett $\frac{1}{n}$-et írunk, a másik helyett pedig úgy választunk új értéket, hogy a számok összege ne változzék. Ezek a számok pozitívak ($a_1>\frac{1}{n}$ miatt $b_1>a_2$), az összegük továbbra is 1, viszont az $\frac{1}{n}$ többször szerepel közöttük, mint az a_i-k között. Az a_i-k extremális választása alapján tehát

$$\left(\frac{1}{b_1^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{b_2^2}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{1}{b_n^2}-1\right)\geq\left(n^2-1\right)^n. \tag{3}$$

Most bebizonyítjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{b_1^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{b_2^2}-1\right)\leq\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right). \tag{4}$$

Ez – mivel a (2) és (3) bal oldalán álló tényezők pozitívak –, ellentmondás.

Először megállapítjuk, hogy $a_1a_2<b_1b_2$, ugyanis ez b_1 és b_2 definícióját behelyettesítve a következő alakba írható:

$$a_1a_2<\left(a_1+a_2-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n};\qquad\text{másrészt}\qquad\left(a_1-\frac{1}{n}\right)\left(a_2-\frac{1}{n}\right)<0;$$

itt pedig az első tényező pozitív, a második negatív. Ha az $a_1a_2<b_1b_2$ egyenlőtlenséget megszorozzuk $(1-b_1-b_2)=(1-a_1-a_2)$-vel (ez nemnegatív, mert $a_1+a_2\leq a_1+\dots+a_n=1$; mivel 0 is lehet, meg kell engednünk az egyenlőséget is), továbbá hozzáadunk $a_1a_2b_1b_2$-t:

$$a_1a_2(1-b_1-b_2)+a_1a_2b_1b_2\leq b_1b_2(1-a_1-a_2)+a_1a_2b_1b_2,$$
$$a_1a_2(1-b_1)(1-b_2)\leq b_1b_2(1-a_1)(1-a_2).$$

Ha most osztunk $a_1a_2b_1b_2$-vel, a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{1}{b_1}-1\right)\left(\frac{1}{b_2}-1\right)\leq\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right). \tag{5}$$

Ezután – az előbbiekhez hasonlóan – az $a_1a_2<b_1b_2$ egyenlőtlenséget szorozzuk meg $(1+b_1+b_2)=(1+a_1+a_2)$-vel, adjunk hozzá $a_1a_2b_1b_2$-t, majd osszunk le ugyanennyivel:

$$a_1a_2(1+b_1+b_2)+a_1a_2b_1b_2<b_1b_2(1+a_1+a_2)+a_1a_2b_1b_2,$$
$$a_1a_2(1+b_1)(1+b_2)<b_1b_2(1+a_1)(1+a_2),$$

$$\left(\frac{1}{b_1}+1\right)\left(\frac{1}{b_2}+1\right)<\left(\frac{1}{a_1}+1\right)\left(\frac{1}{a_2}+1\right).$$

Ha ezt (5)-tel megszorozzuk (az (5) mindkét oldala pozitív, hiszen $0<a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2<1$), éppen (4)-et kapjuk.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., I. o.t.)

Megjegyzés. A $\ln\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$ függvény a $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intervallumban konvex. Ha mindegyik a_i ebben az intervallumban helyezkedik el, akkor a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)+\cdots+\ln\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)}{n}\ge\ln\left(\frac{1}{\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2}-1\right)=\ln(n^2-1),$$

ami pontosan a bizonyítandó állítás. Ennek a gondolatnak kis módosításával a feladatot vissza lehet vezetni arra az esetre, amikor az a_i-k között legalább $n-1$ egyenlő van, és ezek a $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ intervallumban helyezkednek el. (Mivel $\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{2}$, és az a_i-k összege 1, legfeljebb csak az egyik lehet $\frac{1}{\sqrt{3}}$-nál nagyobb.) Erre az egyre más módszert lehet alkalmazni.