Először hegyesszögű háromszögre igazoljuk a feladat állítását. Az *1. ábra* jelöléseit használva, az AMT_3 és az ABT_1 háromszögek hasonlósága alapján $AM : x = c : m_a$, amiből

$$m_a \cdot AM = c \cdot x. \tag{1}$$

Két ugyanilyen hasonlóságból $BM : y = a : m_b$ és $CM : z = b : m_c$. Ezekből az összefüggésekből

$$m_b \cdot BM = a \cdot y \qquad \text{és} \qquad m_c \cdot CM = b \cdot z. \tag{2}$$

Az ACT_3 és BCT_3 derékszögű háromszögekből: $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$, amiből $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ és $z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$. Az (1) és (2) alatti összefüggéseket összeadva, és x, y, z kifejezéseit fölhasználva:

$$m_a \cdot AM + m_b \cdot BM + m_c \cdot CM =$$
$$= c \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} + a \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} + b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Ezután azt kell bizonyítanunk, hogy

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{3}$$

A (3) egyenlőtlenség következik az **F. 2972.** feladat állításából, ami így szól: $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \le s^2$, ahol $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Megoldásai megtalálhatók lapunk 1994/4. számában. Mindössze annyit kell megmutatnunk, hogy

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Ez pedig nyilvánvaló, mert ekvivalens az

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \tag{4}$$

egyenlőtlenséggel.

Ha a háromszög tompaszögű, akkor könnyen megtalálható hasonló háromszögpárok alapján (lásd *2. ábra*)

$$AM : x = b : m_a, \qquad BM : y = c : m_b, \qquad CM : z = a : m_c, \tag{5}$$

ahol $x = AT_3$ és $y = BT_2$ más szerepű szakaszok, mint az első részben. Az m_b^2 kétféle kiszámítása révén $c^2 - x^2 = a^2 - (b+x)^2$, amiből $x = \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2b}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}$ és $z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. (5) alapján, x y és z kifejezéseivel

$$m_a \cdot AM + m_b \cdot BM + m_c \cdot CM = b \cdot x + c \cdot y + a \cdot z =$$
$$= \frac{a^2-b^2-c^2}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2} =$$
$$= \frac{3a^2-b^2-c^2}{2} = \frac{a^2+\left(a^2-c^2\right)+\left(a^2-b^2\right)}{2} > \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy az a oldallal szemben van a tompaszög, és ezért $a^2 > b^2+c^2$. Így most is a (3) egyenlőtlenséget kell igazolnunk.

Ha a háromszög derékszögű (*3. ábra*), akkor

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = m_a^2 + AB^2 + AC^2,$$

tehát azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$m_a^2 + AB^2 + AC^2 \le \frac{3}{2}\left(AB^2+AC^2\right),$$

azaz

$$m_a^2 \le \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right) = \frac{1}{2}BC^2,$$

ami nyilvánvaló, sőt $m_a^2 \le \dfrac{1}{4}BC^2 < \dfrac{1}{2}BC^2$.

Világos, hogy egyenlőség csak hegyesszögű háromszög esetén lehetséges. Az **F. 2972.** feladat I. megoldásából és (4)-ből látjuk, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Gerő Tamás Miklós (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Érdemes megemlíteni, hogy a feladat kitűzője az **F. 2972.** megoldása közben talált rá erre az összefüggésre.

2. A feladat állításánál valamivel többet bizonyítottunk, éspedig:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2 \le \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) \le \frac{3}{2}\left(m_a\cdot AM+m_b\cdot BM+m_c\cdot CM\right).$$

3. Több megoldónk olyan összefüggéseket használt, amelyek bármilyen háromszög esetén érvényesek, és így nem kellett eseteket megkülönböztetniök.