I. megoldás. Az egyes egyenletek akkor értelmesek, ha x, y és z pozitívak, $x \neq \frac{1}{2}$, $y \neq \frac{1}{5}$ és $xy \neq 1$. Ezen kikötések mellett (1) ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$z=(2x)^3; z=(5y)^6; z=(xy)^{\frac{2}{3}}. \tag{2}$$

Az első egyenletet behelyettesítve a másodikba: $(2x)^3=(5y)^6$, amiből köbgyökvonás után $x=5^2\cdot 2^{-1}\cdot y^2$. Ezt és (2) második egyenletét helyettesítsük be a harmadik egyenletbe:

$$\begin{gathered}(5y)^6=\left(5^2\cdot 2^{-1}\cdot y^2\cdot y\right)^{\frac{2}{3}}\\ 5^6\cdot y^6=5^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\cdot y^2\\ y=5^{-\frac{7}{6}}\cdot 2^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5\sqrt[6]{10}}.\end{gathered}$$

A felhasznált összefüggések alapján pedig

$$\begin{gathered}z=(5y)^6=\frac{1}{10},\\ x=5^2\cdot 2^{-1}\cdot y^2=5^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{10}}.\end{gathered}$$

A kapott értékek teljesítik az egyenletrendszert, mert

$$(2x)^3=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)^3=\frac{1}{10}=z, \qquad (5y)^6=\left(\frac{1}{\sqrt[6]{10}}\right)^6=\frac{1}{10}=z,$$

végül

$$(xy)^{\frac{2}{3}}=\left(5^{-\frac{1}{3}-\frac{7}{6}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{2}{3}}=5^{-1}\cdot 2^{-1}=z.$$

A megoldás tehát:

$$x=\frac{1}{2\sqrt[3]{10}}, \qquad y=\frac{1}{5\sqrt[6]{10}}, \qquad z=\frac{1}{10}.$$

Pásztor József (Eger, Szilágyi Erzsébet Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Mivel egyik logaritmus értéke sem 0, z nem lehet 1. Vegyük mindhárom egyenlet reciprokát! Az $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$ azonosság alapján az új egyenletrendszer:

$$\log_z 2x=\frac{1}{3}; \log_z 5y=\frac{1}{6}; (3)\log_z xy=\frac{3}{2}.$$

Az első két egyenlet összegéből vonjuk ki a harmadikat:

$$\log_z 2x+\log_z 5y-\log_z xy=-1.$$

A logaritmusfüggvény azonosságai alapján

$$\log_z \frac{2x\cdot 5y}{xy}=\log_z 10=-1.$$

Ez azt jelenti, hogy $10=z^{-1}$, azaz $z=\frac{1}{10}$. Ezután x és y értékét az első és második egyenletből kiszámíthatjuk:

$\log_{1/10} 2x=\frac{1}{3}$, ebből $2x=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ és $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{10}}$;
$\log_{1/10} 5y=\frac{1}{6}$, ebből $5y=\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$ és $y=\frac{1}{5\sqrt[6]{10}}$.

A kapott értékeket az I. megoldáshoz hasonlóan behelyettesítjük.

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)