

I. megoldás. Legyen tetszőleges n pozitív egészre

$$A_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$$

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden n pozitív egészre $A_n < \sqrt{n} + 1$. Ez $n = 100$ esetén éppen a kívánt állítás.

Ha $n = 1$, akkor $A_n = 1$ és $\sqrt{n} + 1 = 2$, tehát állításunk igaz. Ha pedig valamely 1-nél nagyobb n -re $A_{n-1} < \sqrt{n-1} + 1$, akkor

$$A_n = \sqrt{n + A_{n-1}} < \sqrt{n + \sqrt{n-1} + 1} < \sqrt{n + 2\sqrt{n} + 1} = \sqrt{n} + 1.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Mann Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Ha (1) bal oldalán mindegyik szám helyére 110-et, a legbelső négyzetgyökjelbe pedig 121-et írunk, a számot – a négyzetgyökfüggvény szigorú monotonitása miatt – növeljük:

$$\sqrt{100 + \sqrt{99 + \sqrt{98 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{110 + \sqrt{110 + \sqrt{110 + \dots + \sqrt{110 + \sqrt{121}}}}$$

A legbelső négyzetgyök értéke 11. Ha ezt a helyére beírjuk, pontosan ugyanezt a kifejezést kapjuk, de eggyel kevesebb négyzetgyökkonással. Ezt az átalakítást 100-szor elvégezve azt kapjuk, hogy a bal oldalon éppen 11 áll.

Mészáros Judit (Galánta, Magyar Tannyelvű Gimn., III. o.t.) megoldása alapján

III. megoldás. Azt az egyszerű tényt felhasználva, hogy $x \geq 1$ esetén $\sqrt{x} \leq x$,

$$\begin{aligned} \sqrt{100 + \sqrt{99 + \sqrt{98 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} &\leq \sqrt{100 + \sqrt{99 + \sqrt{98 + 97 + 96 + \dots + 2 + 1}}} < \\ &< \sqrt{100 + \sqrt{99 + \sqrt{98^2}}} = \sqrt{100 + \sqrt{197}} < \sqrt{100 + 15} < 11. \end{aligned}$$

Makai Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Több versenyző az

$$a_k^{(n)} = \sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$$

(a jobb oldalon k darab gyökjel van) sorozat határértékével becsülte felülről (az I. megoldás jelölésével élve) A_n -et. Könnyen ellenőrizhető, hogy rögzített n esetén a sorozat szigorúan monoton nő és felülről korlátos, tehát konvergens. A határértéket az

$$a_{k+1}^{(n)} = \sqrt{n + a_k^{(n)}}$$

rekurzióból lehet kiszámítani. Ha a határértéket B_n -nel jelöljük, a rekurzió bal oldala B_n -hez, jobb oldala $\sqrt{n + B_n}$ -hez tart, tehát $B_n = \sqrt{n + B_n}$. Ennek az egyenletnek egy pozitív megoldása van:

$$B_n = \frac{1 + \sqrt{4n + 1}}{2}.$$

Mindezekből következik, hogy

$$(2) \quad A_n \leq a_n^{(n)} < \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = B_n = \frac{1 + \sqrt{4n + 1}}{2} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.$$

Ez a becslés körülbelül 0,5-del jobb, mint az I. megoldásban bizonyított, és teljes indukcióval is igazolható.

A (2) becslés már „majdnem” pontos. Nem nehéz teljes indukcióval bebizonyítani, hogy

$$(3) \quad A_n \geq \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

A (2) és (3) becslések különbsége:

$$\left(\sqrt{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) - \left(\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n - \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + \sqrt{n - \frac{3}{4}}} < \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Az alsó és felső becslés különbsége tehát 0-hoz tart.

Az (2) és (3) becslést $n = 100$ -ra felírva,

$$10,46 < \sqrt{99,25} + 0,5 < A_{100} < \sqrt{100,5} + 0,5 < 10,53.$$