

Jelöljük a gúla csúcsait A, B, C, D -vel úgy, hogy az A -ban találkozó élek legyenek páronként merőlegesek, és $AB = 2, AC = 6$ és $AD = 4$ cm legyen.

Tekintsük a gúla köré írt gömböt. Ezt az ABC sík egy körben metszi. Mivel az ABC háromszög derékszögű, ezért ennek a körnek a középpontja a BC él felezőpontja. Ekkor viszont az A -nak a BC felezőpontjára vonatkozó A' tükörképe is rajta van ezen a körön, s így egyúttal a gúla köré írt gömbön is. Ugyanígy kapjuk, hogy A -nak a BD felezőpontjára vonatkozó A'' és a CD felezőpontjára vonatkozó A''' tükörképe is a gömb egy-egy pontja (1. ábra). A tükrözés miatt az $ABA'C, ABA''D$ és $ACA'''D$ négyszögek téglalapok, amelyek síkjai – AB, AC és AD merőlegessége miatt – egymásra páronként merőlegesek. Ez a hét pont tehát egy olyan téglatest hét csúcsa, amely téglatest körülírt gömbje megegyezik az $ABCD$ gúla körülírt gömbjével. A téglatest körülírt gömbjének sugara éppen a testátló fele. A testátló négyzete megegyezik az egy csúcsban találkozó élek négyzetének összegével, tehát a körülírt gömb sugara:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{14} \text{ cm.}$$

Jelöljük a beírt gömb középpontját O -val, sugarát r -rel. Kössük össze O -t a gúla csúcsaival. Így a gúlát négy olyan tetraéderre bontottuk fel, amelyek alaplapjai az eredeti gúla lapjai, az ezekhez tartozó magasságuk pedig r (2. ábra). E négy kis tetraéder térfogatának összege megegyezik a gúla térfogatával. Az A -ban találkozó élek merőlegessége miatt a gúla térfogata $\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 8 \text{ cm}^3$, tehát:

$$8 = \frac{1}{3} r (T_{ABC} + T_{ABD} + T_{ACD} + T_{BCD}).$$

A háromszögek közt három derékszögű van, ezek területe egyszerűen kiszámolható az élek ismeretében. A BCD háromszög oldalait Pitagorasz tételét használva kaphatjuk meg: ha $AB = 2, AC = 6$ és $AD = 4$, akkor $BC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}, BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ és $CD = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$. Az oldalak ismeretében a háromszög területét Héron képletével számítjuk ki:

$$\begin{aligned} 4T_{BCD} &= \\ &= \sqrt{(\sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{52})(\sqrt{40} + \sqrt{20} - \sqrt{52})(\sqrt{40} - \sqrt{20} + \sqrt{52})(-\sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{52})} = \\ &= \sqrt{(8 + 2\sqrt{800})(-8 + 2\sqrt{800})} = \sqrt{3136} = 56. \end{aligned}$$

Ezt beírjuk a térfogatra felírt egyenletbe:

$$8 = \frac{1}{3} r (8 + 4 + 12 + 14),$$

amiből $r = \frac{2}{3}$ cm.

Tehát a gúla körülírt gömbjének sugara $\sqrt{14}$ cm, a beírt gömbjének sugara pedig $\frac{2}{3}$ cm.

Zámbó Tibor (Kaposvár, Római Katolikus Gimn., II.o.t.)



