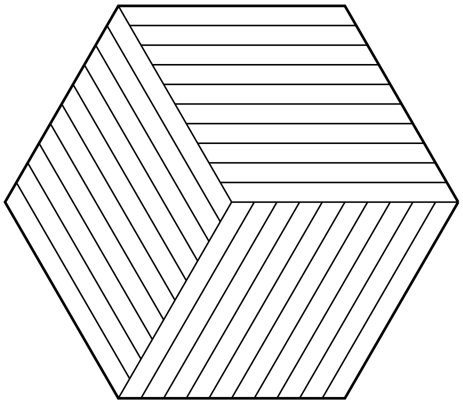
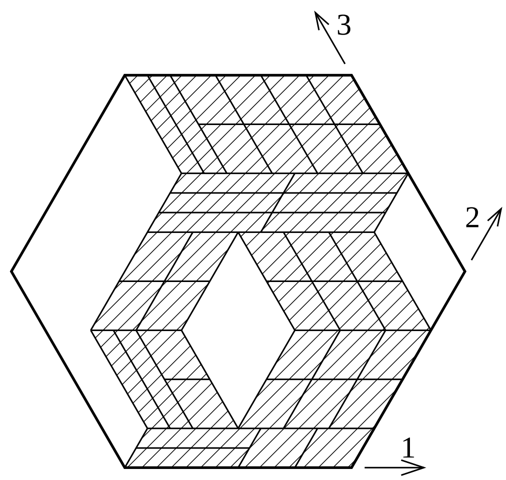
Megmutatjuk, hogy egy szabályos hatszög pontosan akkor bontható fel n egyenlő területű paralelogrammára, ha n osztható 3-mal.

A feltétel elégséges. Ha ui. n 3-mal osztható, akkor egy szabályos hatszög a középpontjából a másodszomszédos csúcsaihoz húzott szakaszokkal 3 olyan egybevágó paralelogrammára bomlik, amelyek mindegyike tovább osztható $n/3$–$n/3$ darab egybevágó paralelogrammára, és ezzel végül is a hatszög n darab egybevágó (és ezért egyenlő területű) paralelogrammára bomlik.



1. ábra



2. ábra

Megmutatjuk, hogy a feltétel szükséges is. Tegyük fel először, hogy a szabályos hatszöget tetszőlegesen osztottuk fel véges sok paralelogrammára. Tekintsük a felosztás valamelyik P paralelogrammájának egy a oldalát. A P-hez az a-ban néhány másik paralelogramma kapcsolódik, ezeknek a-val párhuzamos oldalaihoz pedig újabbak és újabbak, és ezt a sort folytathatjuk egészen addig, amíg el nem jutunk a hatszög valamelyik oldalához. Mivel a számba vett paralelogrammák sorra az a-val párhuzamos oldalaikban kapcsolódtak egymáshoz, azért a sor végét jelentő hatszögoldalnak is párhuzamosnak kell lennie a-val. Így beláttuk, hogy a felosztásban szereplő paralelogrammák mindegyik oldala párhuzamos valamelyik hatszögoldallal. A hatszög oldalai 3 irányt határoznak meg, ezeket a továbbiakban 1-, 2-, ill. 3-iránynak nevezzük. Tekintsük a hatszög valamelyik 1-irányú oldalát, és színezzük ki az ehhez kapcsolódó paralelogrammákat. A kiszínezett paralelogrammákhoz 1-irányú oldalaikon keresztül újabb és újabb paralelogrammák kapcsolódnak, amelyeket ugyancsak színezzünk ki. Ezt az eljárást ismételjük mindaddig, amíg el nem érjük a hatszög másik 1-irányú oldalát. A kiszínezett paralelogrammák ekkor egy S_1 sávot alkotnak. Hasonlóan kapjuk az S_2, ill. S_3 sávot, amelyek végein a hatszög 2-, ill. 3-irányú oldalai vannak. A továbbiakban nevezzünk egy paralelogrammát ij-paralelogrammának, ha annak oldalai az i- és a j-irányt határozzák meg; az ij-paralelogrammák összterülete legyen t_{ij}. Láttuk, hogy a felbontásban minden paralelogramma 12-, 23- vagy 31-paraleolgramma, tehát pl. az S_1 sáv területe $t_{12}+t_{31}$. Messük most el az S_1-et tetszőleges 1-irányú egyenessel. Ekkor az egyenesnek a sávba eső szakaszai egy, a hatszög oldalával megegyező hosszúságú szakaszt alkotnak, ui. a szakaszokat a sávbeli paralelogrammákon keresztül a hatszög bármelyik 1-irányú oldalába eltolhatjuk úgy, hogy az eltolt példányok egymáshoz a végpontokban kapcsolódva ezt az oldalt adják ki. Ha most az S_1-et a benne szereplő paralelogrammák 1-irányú oldalegyeneseivel felszeleteljük kisebb sávokra, akkor előző megállapításunk értelmében a kisebb sávok összterülete megegyezik a hatszög két 1-irányú oldala által kifeszített paralelogrammának a területével. Hasonló mondható el az S_2 és az S_3 sávról is, mindebből pedig az következik, hogy S_1, S_2 és S_3 területe megegyezik:

$$t_{12}+t_{31}=t_{23}+t_{12}=t_{31}+t_{23},$$

azaz

$$t_{12} = t_{23} = t_{31}.$$

Most már igen egyszerűen megkapjuk a megoldás elején megfogalmazott feltétel szükségességét, ha ui. a hatszöget n darab egyenlő területű paralelogrammára bontjuk fel, akkor az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy az 12-, 23-, ill. 31-paralelogrammák száma egyenlő, vagyis n (3 egyenlő szám összegeként) 3-mal osztható.

Megjegyzések. 1. Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.) kiemelte azt a megoldásunkból is kiolvasható megállapítást, hogy bárhogyan is osztunk fel egy szabályos hatszöget (véges sok) paralelogrammára, azokból kiválasztható néhány, amelyek összterülete harmada a hatszög területének.

2. A megoldásban használt módszerrel az is megmutatható, hogy ha egy konvex sokszög felbontható véges sok paralelogrammára, akkor a sokszög szükségszerűen középpontosan szimmetrikus is, hiszen oldalai páronként párhuzamosak és egyenlő hosszúak.