A megoldás során felhasználjuk azt a jól ismert állítást, amely szerint ha a Q racionális szám gyöke egy olyan egész együtthatós polinomnak, amelynek főegyütthatója 1, akkor Q szükségszerűen egész is. Ha ui. M jelöli a szóban forgó p polinom fokát, és $Q = S/T$, ahol S és T relatív prímek, akkor a feltételből adódóan $S^M \equiv T^M p(S/T) \equiv 0 \bmod T$, vagyis $T \mid S^M$, ami S és T választása miatt csak úgy lehetséges, hogy $T = \pm 1$.

A továbbiakban $c_1, c_2, \dots$ olyan egészeket fognak jelölni, amelyek csak a feladatbeli p polinomtól függenek. Mivel p együtthatói racionálisak, azért c_1 megválasztható úgy, hogy a $c_1 p$ polinom együtthatói egészek legyenek. Jelölje c_2 a $c_1 p$ főegyütthatóját, m a polinom fokát. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha t_1 és $t_1 q_1$ egész, akkor a $t = t_1 c_2$ választással tq_n minden n-re egész. Az állítás nyilvánvaló $n = 1$ esetén, ha pedig már tudjuk, hogy valamilyen n mellett igaz, azaz tq_n egész, akkor az állítás a megoldás elején említett segédtétel alapján következik tq_{n+1}-re is, hiszen ez a racionális szám a feladat feltétele szerint gyöke a $c_1/c_2 \cdot t^m \left(p(x/t) - q_n\right)$ polinomnak, amelyről pedig az indukciós feltevést használva könnyű kimutatni, hogy egész együtthatós, 1 főegyütthatóval. Ha most x elég nagy abszolút értékű valós szám, és c_3 jelöli a $c_1 p$ együtthatói közül a maximális abszolút értékűt, akkor a háromszög-egyenlőtlenség segítségével

$$|c_1 p(x)| \geq |c_2 x^m| - |c_1 p(x) - c_2 x^m| \geq |c_2 x^m| - m|c_3|\,|x|^{m-1} = |x_m| \left| c_2 - \frac{m|c_3|}{|x|} \right|,$$

vagyis $m \geq 2$ miatt van olyan c_4, amivel $|x| > c_4$ esetén $|p(x)| > |x|$, másképpen fogalmazva tetszőleges x-re $|x| \leq \max(c_4, |p(x)|)$. Ebből a $|q_n| \leq \max(c_4, |q_{n-1}|)$ egyenlőtlenséget kapjuk, amelyet többször alkalmazva

$$|q_n| \leq \max(c_4, |q_{n-1}|) \leq \max(c_4, |q_{n-2}| \leq \dots \leq \max(c_4, |q_1|).$$

Ezek szerint a (q_n) sorozat korlátos, és mivel azt is láttuk, hogy a sorozat t-szerese egészekből áll, azért (q_n) csak véges sok különböző tagot tartalmaz. Így tehát van olyan q, amely végtelen sokszor előfordul a sorozatban, speciálisan van olyan i és k, amelyre $q_i = q_{i+k} = q$. Megmutatjuk, hogy k periódusa a sorozatnak. Jelölje tetszőleges pozitív egész l esetén

$$p^{(l)}(x) = \underbrace{p(p(\dots p(p(x))\dots))}_{l \text{ db}}$$

a p polinomfüggvény l-szeres iteráltját. Ekkor tehát $q = q_i = p^{(k)}(q_{i+k}) = p^{(k)}(q)$. Ha most n tetszőleges, akkor van olyan $j > n + k$, amellyel $q_j = q$; ennek segítségével

$$q_{n+k} = p^{(j-n-k)}(q_j) = p^{(j-n-k)}(q) = p^{(j-n-k)}\left(p^{(k)}(q)\right) = p^{(j-n)}(q) = p^{(j-n)}(q_j) = q_n,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Gyarmati Katalin (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. Írjuk a q_n-et s_n/t_n alakba, ahol s_n és t_n relatív prím egészek. A megoldásban látottak alapján a (q_n) sorozat nem tartalmazhat c_4-nél nagyobb abszolút értékű tagot, hiszen akkor nem lehetne periodikus. Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozatában megmutatta, hogy ha az x racionális szám egyszerűsített alakjában a nevező elég nagy (nagyobb, mint egy c_5), akkor $p(x)$ egyszerűsített alakjában a nevező nagyobb, mint x-ében. Ennek segítségével egyrészt újabb bizonyítást nyerhetünk megoldásunk azon részeredményére, miszerint a nevezők (t_n) sorozata korlátos, másrészt, a feladat állításának ismeretében azt is kiolvashatjuk belőle, hogy $|t_n| \leq c_6$, vagyis hogy a (t_n) sorozat korlátozható egy, csak a p-től függő konstanssal. Persze ekkor $|q_n| \leq c_4$ alapján $|s_n| \leq c_4 c_6 = c_7$-re is teljesül, vagyis a számlálók is hasonlóan korlátozhatók. Mivel a minimális k periódus (most már) a legkisebb olyan pozitív egész, amelyre $p^{(k)}(q_1) = q_1$, és az előbb mutattuk meg, hogy q_1-nek p-től függően csak véges sok értéke jön szóba, azért egy $|k| \leq c_8$ alakú becslés is fennáll. Összességében tehát elmondhatjuk, hogy ha a p racionális együtthatós polinomhoz található „visszafelé rekurzív” racionális sorozat, akkor *minden* ilyen sorozat periodikus valamilyen, csak a p-től függő konstanssal (vegyük az első c_8 darab pozitív egész legkisebb közös többszörösét). Érdekes lenne k-ra valamilyen alsó becslést adni, beleértve a $k = \infty$ esetet is, amin azt értjük, hogy a p-hez egyáltalán nem található periodikus racionális sorozat.