Egy háromszög *felbontásán* a továbbiakban mindig egymáshoz hasonló háromszögekre bontást értünk. A keletkező háromszögeket kis háromszögeknek fogjuk hívni. Legyenek az eredeti háromszög szögei A, B, C, és jelöljük ennek a háromszögnek egy felbontásánál adódó kis háromszögek szögeit α, β, γ-val.

Tegyük fel, hogy e felbontásnál az eredeti háromszög csúcsainál α, β, γ egyaránt előfordul. Ekkor $A+B+C \geq \alpha+\beta+\gamma$; mivel mindkét összeg egyaránt $180°$, azért szükséges, minden csúcsban egyetlen kis háromszög helyezkedjen el, akkor pedig a kis háromszögek az eredetihez hasonlóak.

Megmutatjuk, hogy ha A, B, C-t úgy választjuk meg, hogy $A:B:C = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ legyen, akkor minden felbontás az iménti típusú lesz. Tételezzük fel ugyanis, hogy létezik másfajta felbontás is, pl. olyan, amelynél a kis háromszögek α, β, γ szögei közül γ az eredeti háromszög egyetlen csúcsánál sem fordul elő. Alkalmas q_1, q_2, $\ldots$, q_6 nemnegatív egészekkel ekkor

$$A = q_1\alpha + q_2\beta, \qquad B = q_3\alpha + q_4\beta, \qquad C = q_5\alpha + q_6\beta.$$

Könnyen látható, hogy így

$$q_7 A + q_8 B + q_9 C = 0,$$

ahol $q_7 = q_3q_6 - q_5q_4$, $q_8 = q_1q_6 - q_5q_2$, $q_9 = q_1q_4 - q_3q_2$. Tehát A, B, C választása folytán

$$q_7 + q_8\sqrt{2} + q_9\sqrt{3} = 0$$

ahonnan

$$q_7^2 = 2q_8^2 + 2q_8q_9\sqrt{6} + 3q_9^2.$$

Ezek szerint $q_8q_9\sqrt{6}$ racionális, de mivel $\sqrt{6}$ nem racionális, ezért $q_8 = 0$ vagy $q_9 = 0$. Ha $q_8 = 0$, akkor

$$q_8\alpha = q_6A - q_2C = 0 \quad \text{és} \quad q_8\beta = q_1C - q_5A = 0,$$

tehát, mivel $A:C = 1:\sqrt{3}$ és $\sqrt{3}$ irracionális, $q_1 = q_2 = 0$, ami ellentmondás (mert A pozitív). Ha pedig $q_9 = 0$, akkor

$$q_9\alpha = q_4A - q_2B = 0 \quad \text{és} \quad q_9\beta = q_1B - q_3A = 0,$$

vagyis, mivel $A:B = 1:\sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$ irracionális, $q_1 = q_2 = 0$, ami ismét ellentmondás.

Minden esetben ellentmondásra jutottunk, ami azt igazolja, hogy az $A:B:C = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ választással háromszögünknek nincsen olyan felbontása, amelynél a csúcsokban legfeljebb csak kétfajta szerepel a kis háromszögek szögei közül, tehát a felbontásban szereplő háromszögek szükségszerűen hasonlóak az eredetihez.

Megjegyzések. 1. *Csörnyei Marianna* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.) igazolta, hogy ha egy háromszögnek létezik olyan egymáshoz hasonló háromszögekre való felbontása, amelyben a kis háromszögek nem hasonlóak az eredetihez, akkor a háromszög szögei megbetűzhetők A, B, C-vel úgy, hogy az alábbiak valamelyike teljesül:

a)A, B és C úgy aránylik egymáshoz, mint három egész szám,

b)$A = B$.

c)$A + 2B = 2C$.

d)$2A + 4B = C$.

e)$2A = B + C$.

2. *Futó Gábor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.) megjegyezte, hogy ha egy háromszög szögeit „véletlenszerűen” választjuk, akkor az előző megjegyzésbeli eset 0 valószínűséggel fordul elő.