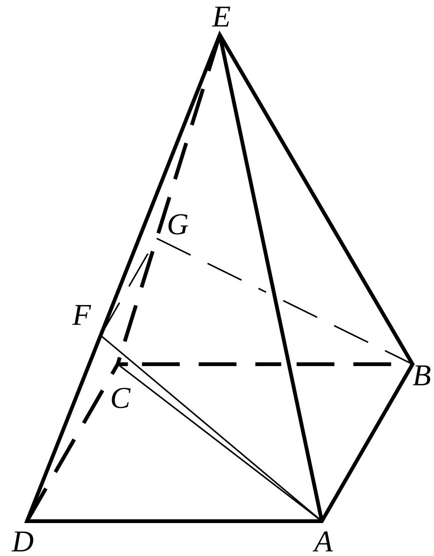

Legyenek a gúla csúcsai A, B, C, D, E és AB alapélre illeszkedő sík messe a DCE lapot az aranymetszés szerint az FG szakaszban (lásd az *ábrát*). Az ACE pontokon átmenő sík nyilván felezi a gúla térfogatát. Ezért elég megmutatnunk, hogy az $ACDE$ gúla térfogata egyenlő az $AFGBE$ gúla térfogatával. Bevezetjük a következő típusú jelöléseket: pl. V_{ACDE} jelentse az A, C, D, E csúcsokkal rendelkező gúla térfogatát, T_{CDE} pedig a CDE háromszög területét. Legyen továbbá az A csúcs távolsága a CDE laptól m_1, E távolsága az $ABGF$ négyszög síkjától m_2, az $ABGF$ trapéz magassága m_3. Előbbi megjegyzésünk szerint elég bebizonyítani, hogy

$$V_{ACDE} = V_{AFGBE}, \tag{1}$$

vagy

$$\frac{V_{ACDE}}{V_{AFGE}} = \frac{V_{AFGBE}}{V_{AFGE}}. \tag{2}$$

Ezt úgy tesszük, hogy kiszámítjuk (2) mindkét oldalát. A bal oldal:

$$\frac{V_{ACDE}}{V_{AFGE}} = \frac{T_{CDE}\cdot m_1}{T_{GFE}\cdot m_1} = \left(\frac{CD}{FG}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

ahol fölhasználtuk, hogy hasonló háromszögek területének aránya az oldalak arányának négyzete.

A (2) jobb oldala:

$$\frac{V_{AFGBE}}{V_{AFGE}} = \frac{T_{ABGF}\cdot m_2}{T_{AGF}\cdot m_2} = \frac{\frac{AB+FG}{2}\cdot m_3}{\frac{FG\cdot m_3}{2}} = \frac{AB}{FG}+1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}+1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ezzel beláttuk (1)-et, ami ekvivalens a feladat állításával.

Horváth István (Fonyód, Mátyás Király Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Több megoldónk a feladatot általánosította paralelogramma alapú gúlára, illetve tetszőleges $\dfrac{FG}{AB}$ esetén meghatározta, hogy az AB alapélre illeszkedő sík milyen arányú részekre osztja a gúla térfogatát.