Ismeretes, hogy a háromszög területe $t=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R}$, továbbá a Heron-képlettel ekvivalens a következő:

$$16t^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Ezeket felhasználva átrendezés után

$$\frac{1}{R^2}=\frac{16t^2}{a^2b^2c^2}=\frac{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}{a^2b^2c^2}==\frac{(a^2+b^2-c^2+2ab)(c^2-a^2-b^2+2ab)}{a^2b^2c^2}==\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-\left[a^4-2a^2\right.}{}$$

Ezzel a bal oldali egyenlőtlenséget igazoltuk.

A második egyenlőtlenség bizonyításához felhasználjuk a $t=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot r$ összefüggést, és a Heron-képlet fent említett alakját:

$$\frac{1}{(2r)^2}=\frac{(a+b+c)^2}{16t^2}=\frac{a+b+c}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}==\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}==\frac{1}{(a-b+c)(-a+b+c}$$

Ezzel a feladat másik állítását is beláttuk.

Mindkét esetben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $a=b=c$, tehát ha a háromszög egyenlő oldalú.

Méder Áron (Budapest, Törökugrató Utcai Ált. Isk., 8. o.t.)

Megjegyzés. Feladatunk kézenfekvő következménye az ún. sugáregyenlőtlenség: $R\geq 2r$.