I. megoldás. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$k\sqrt{x_k-k^2}=\sqrt{k^2(x_k-k^2)}\le\frac{k^2+(x_k-k^2)}{2}=\frac{x_k}{2}\qquad(1\le k\le n \text{ egész}),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $k^2=(x_k-k^2)$, azaz $x_k=2k^2$. Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\dots+n\sqrt{x_n-n^2}\le\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{2}$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha minden k-ra $x_k=2k^2$.

A megoldás tehát: $x_1=2$, $x_2=8$, $x_3=18$, $\dots$, $x_n=2n^2$.

II. megoldás. Írjuk fel a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget az 1, 2, $\dots$, n, illetve $\sqrt{x_1-1^2}$, $\dots$, $\sqrt{x_n-n^2}$ számokra, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}1\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\dots+n\sqrt{x_n-n^2}&\le\\ \le\sqrt{1^2+2^2+\dots+n^2}\sqrt{(x_1-1^2)+\dots+(x_n-n^2)}&=\\ =\sqrt{(1^2+\dots+n^2)(x_1+\dots+x_n-(1^2+\dots+n^2))}&\le\\ \le\frac{(1^2+\dots+n^2)+(x_1+\dots+x_n-1^2-\dots-n^2)}{2}&=\frac{x_1+\dots+x_n}{2}.\end{aligned}$$

Egyenlőség az első esetben akkor áll, ha

$$\sqrt{x_1-1^2}\ :\ \sqrt{x_2-2^2}\ :\ \dots\ :\ \sqrt{x_n-n^2}=1\ :\ 2\ :\ \dots\ :\ n,$$

azaz valamilyen valós c számra $\sqrt{x_k-k^2}=ck$. A második esetben pedig az az egyenlőség feltétele, hogy $1^2+\dots+n^2=x_1+\dots+x_n-1^2-\dots-n^2$, azaz

$$x_1+\dots+x_n=2(1^2+\dots+n^2).$$

Behelyettesítve x_k helyére $(ck)^2+k^2=(c^2+1)k^2$-et:

$$(c^2+1)(1^2+\dots+n^2)=2(1^2+\dots+n^2),$$

vagyis $c^2+1=2$.

Mindez együtt azt jelenti, hogy egyenlőség pontosan akkor áll, ha $x_k=2k^2$ minden k-ra.

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)