Vizsgáljuk meg először az állításban szereplő kifejezések értelmességét, azaz, hogy nem osztottunk-e valahol nullával vagy vontunk négyzetgyököt negatív számból. A $p>0$ feltételből azonnal látszik, hogy sehol sem tettünk ilyet.

A továbbiakban átalakítjuk az egyenlőtlenséglánc középső tagját:

$$(2p+1)\left(\sqrt{\frac{p+1}{p}}-\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right)=(2p+1)\left(\frac{\sqrt{p+1}\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\sqrt{p}}{\sqrt{p(p+1)}}\right)=\frac{2p+1}{\sqrt{p^2+p}},$$

ismét használva a feltételt: $p>0$ s így $p+1>0$ is fennáll.

Ezután először a jobb oldali egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Mivel $\sqrt{p^2+p}>0$, így elegendő (s persze szükséges is) azt igazolni, hogy

$$2p+1>2\sqrt{p^2+p}, \tag{1}$$

rendezve

$$2p+1-2\sqrt{p}\sqrt{p+1}>0,$$

viszont a bal oldal éppen teljes négyzet, és így nemnegatív:

$$\left(\sqrt{p}-\sqrt{p+1}\right)^2=p+p+1-2\sqrt{p}\sqrt{p+1}=2p+1-2\sqrt{p}\sqrt{p+1},$$

és mivel $\sqrt{p}-\sqrt{p+1}\neq 0$, azért (1)-ben valóban határozott egyenlőtlenség áll.

Tekintsük most a bal oldali egyenlőtlenséget:

$$2+\frac{1}{2(p^2+p)}>\frac{2p+1}{\sqrt{p^2+p}}.$$

A bal oldalt átalakítva:

$$2+\frac{1}{2(p^2+p)}=\frac{4p^2+4p+1}{2(p^2+p)}=\frac{(2p^2+1)^2}{2(p^2+p)}=\frac{2p+1}{\sqrt{p^2+p}}\frac{2p+1}{2\sqrt{p^2+p}},$$

vagyis a bizonyítandót ekvivalens módon átfogalmazhatjuk:

$$\frac{2p+1}{\sqrt{p^2+p}}\left(\frac{2p+1}{2\sqrt{p^2+p}}-1\right)>0.$$

A bal oldalon álló első tényező pozitivitása a $p>0$ feltételből látszik, míg a másodiké a következő átalakításból:

$$\frac{2p+1}{2\sqrt{p^2+p}}-1=\frac{2p+1-2\sqrt{p^2+p}}{2\sqrt{p^2+p}}.$$

Itt a nevező (szintén $p>0$ miatt) pozitív, a számlálóról pedig ezt az éppen az előbb igazolt (1) egyenlőtlenség mutatja. Ezzel a teljes feladatot megoldottuk.

Szentiványi Eszter (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján