A feladatot általánosabban oldjuk meg: tegyük föl, hogy a csoportok k csapatból állnak, és azok jutnak tovább, akik legfeljebb m vereséget szenvednek. A kérdés pedig az eredeti: hányan juthatnak tovább egy csoportból? Az $m \geq k-1$ esetben persze mindenki továbbjut, így a továbbiakban tegyük föl, hogy $m \leq k-2$ és ennek megfelelően $k \geq 3$.

Jelölje a továbbjutók számát t, és vizsgáljuk meg először azokat a mérkőzéseket, amelyeket ők játszottak egymás között. Látható, hogy ez $\frac{t(t-1)}{2}$ mérkőzést jelent: mindenki $t-1$ másikkal játszott, ez $t(t-1)$, viszont ekkor mindent pontosan kétszer számoltunk. Minden mérkőzésnek volt vesztese, ezért a t továbbjutó csapat összesen legalább $\frac{t(t-1)}{2}$ vereséget szenvedett. Közülük senki sem kapott ki m-nél többször, ezért

$$\frac{t(t-1)}{2} \leq tm$$

teljesül. Ez nyilván fennáll a $t=0$ esetben, máskor pedig a

$$t \leq 2m+1$$

alakra hozható. Mivel ennek a $t=0$ is megfelel, így tehát azt kaptuk, hogy a továbbjutók száma legfeljebb $2m+1$ lehet.

Hasonló meggondolást alkalmazunk a kiesők egymás közötti mérkőzéseire. Közülük mindegyik csapat legfeljebb t továbbjutótól kaphatott ki, s mivel összesen legalább $m+1$-szer veszített (hiszen kieső), így legalább $m-t+1$ kiesőtől is vereséget szenvedett. Azaz a kiesők egymás között összesen legalább $(k-t)(m-t+1)$-szer veszítettek. Ez nem lehet több, mint az általuk egymással játszott összes mérkőzésük száma, vagyis

$$\frac{(k-t)(k-t-1)}{2} \geq (k-t)(m-t+1).$$

Ez $k \neq t$ esetén (ekkor ugyanis $k > t$, hiszen $k \geq t$ nyilvánvaló)

$$k-t-1 \geq 2m-2t+2, t \geq 2m-k+3$$

alakot ölt, s ez tartalmazza a $k=t$ esetet is ($k-2 \geq m$ alapján).

Azt kaptuk tehát, hogy a lehetséges t számokra

$$2m-k+3 \leq t \leq 2m+1$$

teljesül. Most megmutatjuk, hogy ezek valóban jók is: minden ilyen t-re megadjuk a mérkőzések olyan kimenetelét, amelynél t csapat jut tovább. Ehhez először kijelölünk t csapatot – ők lesznek a továbbjutók, a többiek kiesnek. A köztük levő mérkőzések eredményét is úgy választjuk meg, hogy mindig a továbbjutó csapat legyen a győztes.

Vizsgáljuk most a továbbjutók egymás közti meccseit. Tekintsük először a $t=2m+1$ esetet. A csapatokat körbeállítjuk; mindenki legyőzi a tőle jobbra álló m csapatot, a többitől pedig vereséget szenved. Ezzel biztosítottuk, hogy ez a t csapat valóban továbbjut. A $t < 2m+1$ esetekben a következőképpen járunk el: képzeletben $2m+1$ csapatra egészítjük ki a továbbjutókat, köztük a már leírt módon elrendezzük az eredményeket, majd a valójában tovább nem jutó csapatok győztes mérkőzéseinek eredményét megfordítjuk. Ez valóban jó, hiszen ekkor a t csapat egyike sem veszített m-nél többször.

Most vizsgáljuk a kiesők mérkőzéseit. Ezúttal a $t=2m-k+3$ esettel kezdjük. Ekkor $k-(2m-k+3)=2k-2m-3$ kieső van. Az előbbi „körbeállítós” módszerrel elérhető, hogy a kiesők egyenként $k-m-2$ meccset veszítenek el egymás ellen. Ezenkívül a továbbjutóktól is kikapnak, tehát összesen $k-m-2+2m-k+3=m+1$-szer veszítenek, és ezzel kiesnek. A nagyobb t-kre kevesebb kieső lesz, úgyhogy a már látott módon képzeletben kiegészítjük őket $2k-2m-3$-ra, beosztjuk a mérkőzéseket, majd a valójában továbbjutók egymás közti eredményeit visszaállítjuk a már rögzítettekre, a kiesőktől elszenvedett vereségeiket pedig győzelemre módosítjuk. Ezáltal a $k-t$ kieső mindegyike legalább $m+1$-szer veszített, és a továbbjutók korábban már meghatározott eredményei sem változtak.

Figyelmesen megnézve, eddigi gondolatmenetünk kisebb pontosításra szorul. Előfordulhat ugyanis, hogy $2m+1 > k$ vagy $2m-k+3 < 0$ teljesül, és az ilyen t-k nyilván nem lehetségesek. Tehát legfeljebb a

$$\max(0, 2m-k+3) \leq t \leq \min(k, 2m+1)$$

állítás lehet igaz. Ekkor viszont a konstrukcióban is gondok lépnek föl: amikor a t továbbjutót $2m+1$-re egészítjük ki, talán nincs is annyi csapat, s ugyanez vonatkozhat a kiesők $2k-m-3$-ra való kiegészítésre. A következő megfontolással azonban ezek a problémák kiküszöbölhetők.

Ha több csapatra kell kiegészíteni, mint amennyi van, akkor ehhez „fiktív” csapatokat is használunk. Ugyanúgy kiosztjuk a mérkőzések eredményeit, majd először elhagyjuk a fiktív csapatokat (mérkőzéseikkel együtt), utána pedig a többieket (mérkőzéseiket korrigálva). A továbbjutók kiegészítésekor ez a művelet nem növeli a kiválasztott t csapat vereségeinek számát, a kiesőknél pedig a győzelmekét. Azaz, a továbbjutásra szánt t csapatnak az elhagyás után is legfeljebb m veresége lesz, a $k-t$ másiknak pedig legfeljebb $(k-1)-(m-1)$ győzelme, vagyis az a t csapat továbbjut, a többi pedig nem.

Ezzel tehát minden t-re megadtuk a bajnokság egy megfelelő kimenetelét, ily módon a feladatot megoldottuk. A kérdezett $k=5$, $m=1$ és $k=6$, $m=1$ esetben a továbbjutók számára

$$\max(0,2-5+3)=0\le t\le 3,\quad \text{illetve}\quad \max(0,2-6+3)\le t\le 3$$

teljesül, azaz 0, 1, 2 vagy 3 csapat juthat tovább.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Sok megoldó csak a továbbjutók *maximális* számát határozta meg, ezért csak részpontszámot kapott. Nem kapott pontot, aki *csak* ábrát küldött. Természetesen azok, akik az eredeti feladatot a konkrét esetre (a megadott megoldáshoz hasonló gondolatmenettel) megoldották, 5 pontot kaptak.