Tudjuk, hogy a csonkakúp térfogata

$$V_{\mathrm{cs}} = \frac{\pi}{3} m \left(R^2 + r^2 + Rr\right),$$

ahol R az alapkör, r a fedőkör sugarát jelöli. A gömb térfogata:

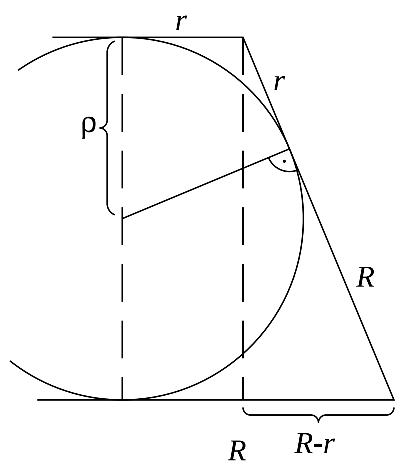
$$V_{\mathrm{g}} = \frac{4\pi\varrho^3}{3},$$

ϱ a gömb sugara. Ekkor a feltétel szerint

$$\frac{\pi}{3} m \left(R^2 + r^2 + Rr\right) = 2 \cdot \frac{4\pi\varrho^3}{3},$$

egyszerűsítve és $m = 2\varrho$-t helyettesítve kapjuk, hogy

(1) $$R^2 + r^2 + Rr = 4\varrho^2$$



Tudjuk, hogy ha a csonkakúpot elmetsszük az alapkörének középpontján átmenő, alapsíkra merőleges síkkal, a síkmetszet egy egyenlő szárú trapéz. A trapéz párhuzamos oldalai $2R$, illetőleg $2r$, szárai pedig az érintőszakaszok egyenlősége miatt $R + r$.

Ekkor Pitagorasz tétele szerint

$$(2\varrho)^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr.$$

Ezt behelyettesítve (1)-be az

$$R^2 + r^2 - 3Rr = 0$$

egyenlethez jutunk.

Osszuk végig az egyenletet $Rr \neq 0$-val, és vezessük be az $\frac{R}{r} = u$ új ismeretlent, ekkor egyszerűsítés után az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$u^2 - 3u + 1 = 0,$$

ahonnan

$$u = \frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad R = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} r \approx 2{,}618.$$

(Az egyenlet másik gyöke az $\frac{r}{R}$ hányados értékét adja.)